UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Cátedras:

“ANÁLISIS MATEMÁTICO I”
“MATEMÁTICA I”
“MATEMÁTICA”

Carreras:

Profesorado en Física
Licenciatura en Física
Profesorado en Química
Licenciatura en Química
Técnico Químico Universitario
Técnico en Energías Renovables

Docentes responsables: LIC. JOSÉ EDUARDO NIEVA

JTP LIC. PABLO N. KONVERSKI

Año: 2019

LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
QUÍMICA GENERAL I 8-10 HS AULA 5 B	LABORATORIO I 8-13 HS AULA LABORATORIO 2	QUÍMICA GENERAL I 8-10 HS AULA 21		
		ANÁLISIS MATEMÁTICO I / MATEMÁTICA I/ MATEMÁTICA 10-13 HS AULA 5 B	ANÁLISIS MATEMÁTICO I/ MATEMÁTICA I/ MATEMÁTICA 10-13 HS AULA 5 B	
		LABORATORIO I 15-19 HS AULA LABORATORIO 3		QUÍMICA GENERAL I 14-18 HS AULA LABORATORIO 3

Evaluaciones para matricular

27/03 EVALUACIÓN DE QUÍMICA GENERAL I

28/03 EVALUACIÓN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO I / MATEMÁTICA I/ MATEMÁTICA

CONCEPTOS PRELIMINARES DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Palabras claves

Manejo algebraico de ecuaciones. Recta numérica. Valor absoluto.

Análisis matemático

En esta cátedra de Análisis matemático estudiaremos, desde el punto de vista algebraico, las funciones entre conjuntos de números reales y algunas construcciones derivadas. Se empieza a desarrollar a partir del inicio de la formulación rigurosa de límite de una función y se prosigue con el estudio de conceptos como la continuidad, la derivación y sus aplicaciones, así como también la operación de integración; de diversos tipos de funciones conocidas.

El punto de vista algebraico es aquel que se vale de expresiones tales como "$(a+b)^2$" o "$x=vt+x_0$" donde se diferencian parámetros o constantes (**a**, **b**, **2**, **v** y $\mathbf{x_0}$ en este caso, siendo las primeras letras del alfabeto) que pueden tomar un valor determinado arbitrariamente y variables o incógnitas (**x** y **t** en estos ejemplos, siendo generalmente algunas de las letras al final del abecedario) que pueden tomar cualquier valor dentro de un conjunto de números reales.

Importancia del Análisis matemático

Los conocimientos por adquirir en esta Cátedra son de vital importancia para poder alcanzar aprendizajes más abstractos y profundos en los cursos correlativos de los próximos cuatrimestres. El conocimiento del dominio, imagen, límite, continuidad, deriva, diferencial e integral de las funciones típicas es crucial para comprender las leyes de la naturaleza que se analizarán en las carreras de Tecnicatura en Energías renovables, Lic. y Prof. En Física, Lic. y Prof. En Química y de Técnico Químico Universitario. En el desarrollo de estas carreras se aplicarán las ecuaciones matemáticas que se estudiarán en esta cátedra, así como también las nuevas operaciones matemáticas que se suman a la suma, resta, división y multiplicación, radicación, potenciación y logaritmo.

Por ejemplo, la siguiente ecuación

$$x=vt+x_0$$

Puede clasificarse matemáticamente como una ecuación lineal de dos incógnitas pero desde el punto de vista científico se puede asignar significado a cada una de las letras dentro de la ecuación y así interpretarla de diferente manera; como por ejemplo determinar la posición **x** de un móvil para cada tiempo **t**, siendo **v** la velocidad del movimiento y $\mathbf{x_0}$ su posición inicial de referencia; o desde el punto de vista químico el nivel de concentración **x** de una sustancia conforme avanza el tiempo **t,** según su velocidad de reacción **v**, dada la concentración inicial $\mathbf{x_0}$.

1. Conceptos preliminares

Para la mejor adquisición de las temáticas descriptas rápidamente en la primera sección, se hace necesario refrescar algunos conceptos y definiciones aprendidas en el nivel educativo anterior; es decir, los temas que se tratarán a continuación pueden ya haber sido vistos en clases de Matemáticas y por ello ser ya parte del dominio de conocimientos del alumno. En caso contrario servirá de oportunidad para ponerse a punto e iniciar de una mejor manera con el aprendizaje propuesto.

1.1. Fracciones

Una fracción está compuesta por dos factores:

$$\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Una fracción puede interpretarse como una división matemática entre dos números (4/3), una razón o relación de proporcionalidad (1 docente/20 alumnos = 1 docente por cada 20 alumnos) o como un indicador de cuantas partes de un todo se están considerando (1/8 de una tarta= 1 porción de una tarta que ha sido dividida en 8 porciones).

1.1.1 Operaciones con fracciones:

La forma de operar matemáticamente con fracciones es:

Suma y resta de fracciones:

$$\text{Suma} \rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \qquad \text{Resta} \rightarrow \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}$$

En ambos casos, el producto *bd* se conoce como el primer múltiplo común de los denominadores, y también es conocido como el común denominador de ambas fracciones.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 4+5\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{8+15}{12}=\frac{23}{12}$$

Multiplicación y División:

$$\textit{Multiplicación} \rightarrow \frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}=\frac{e\cdot g}{f\cdot h} \qquad \textit{División} \rightarrow \frac{\frac{e}{f}}{\frac{g}{h}}=\frac{e}{f}\Big/\frac{g}{h}=\frac{e\cdot h}{f\cdot g}$$

-Simplificación de fracciones: La simplificación de fracciones es un proceso matemático que nos permite tener un resultado mucho más claro y simple. En diversos casos podremos operar con fracciones y llegar a un numerador y/o denominador en los que nos demos cuenta de que en ambos tenemos un submúltiplo que podemos extraer como factor común, por ejemplo:

$$\frac{2}{3}-\frac{6}{4}=\frac{2\cdot 4-6\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{8-18}{12}=\boxed{-\frac{10}{12}}$$

Si analizamos el resultado, el numerador y denominador son números par, es decir que son divisibles por 2. Entonces podremos descomponerlos para simplificar y llegar a un resultado más sencillo de interpretar:

$$-\frac{10}{12}=-\frac{\cancel{2}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 6}=\boxed{-\frac{5}{6}}$$

En ambos casos el resultado es válido y es exactamente el mismo, hecho que podemos verificar haciendo uso de la calculadora, sin embargo, uno es más entendible y reducido que el otro.

Otra opción para realizar el mismo proceso de simplificación es el de realizar la descomposición en factores antes de realizar la resta:

$$\frac{2}{3}-\frac{6}{4}=\frac{2\cdot 4-6\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{(\cancel{2}\cdot 2\cdot 2)-(\cancel{2}\cdot 3\cdot 3)}{(3\cdot 2\cdot \cancel{2})}=\frac{4-9}{6}=\boxed{-\frac{5}{6}}$$

En la última parte se han descompuesto todos los factores en sus submúltiplos y para mejor entendimiento se ha agregado un paréntesis para cada término. Si prestamos atención a las multiplicaciones, notaremos que hay factores que son comunes, pero solo uno de ellos se repite igual cantidad de veces dentro de cada término: un factor 2. Por esa razón solo podremos simplificar ese factor de dentro de cada paréntesis y luego culminar con la operación, arribando a un resultado más reducido y sencillo de comprender.

1.2 Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas se caracterizan por requerir la aplicación ordenada de las operaciones básicas sobre uno o más términos de una expresión matemática o algebraica.

Una expresión matemática puede contener uno o más términos, clasificándose según la cantidad que contiene de ellos en:

- Monomios: expresiones que constan de un único termino;
- Binomios: aquellas que están conformadas por dos términos;
- Trinomios: las que poseen tres términos;
- Polinomios: aquellas expresiones que constan de dos o más términos.

Un término es, conceptualmente, un número o un producto de números donde cada uno de ellos se denomina factor o divisor. Cada término se distingue de otro por medio de un signo de suma (+) o de resta (-). Cada término puede contener igualmente sumas y restas si estas están contenidas dentro de paréntesis o corchetes.

Para resolver una expresión se debe seguir cierta convención o aplicación de reglas ordenadas para la resolución del problema, a fin de evitar cálculos erróneos:

1) Separar en términos la expresión a resolver;
2) Resolver las operaciones dentro de cada término, Si hay paréntesis y corchetes:
a) primero lo que está dentro de los paréntesis y luego las que están dentro de los corchetes, para finalizar con las operaciones fuera de los mismos;
b) Primero realizar los productos, divisiones, raíces y potencias, para luego seguir con las sumas y restas.
3) Sumar y restar cada término.

Ejemplo: Hallar el valor numérico de la siguiente expresión algebraica

$$3+\frac{1}{7}\left(3\cdot 3-\frac{6}{3}\right)^2-\frac{(1-3)^2}{4}+4\sqrt{(15-6)}+\frac{24}{3}$$

Primer paso - Separación en términos: Los términos son separados por los signos más y menos que se hallan fuera de paréntesis y corchetes.

$$\overset{1^{er}\text{ término}}{[3]}+\overset{2^{do}\text{ término}}{\left[\frac{1}{7}\left(3\cdot3-\frac{6}{3}\right)^2\right]}-\overset{3^{er}\text{ término}}{\left[\frac{(1-3)^2}{4}\right]}+\overset{4^{to}\text{ término}}{\left[4\sqrt{(15-6)}\right]}+\overset{5^{to}\text{ término}}{\left[\frac{24}{3}\right]}=$$

Segundo paso – resolver las operaciones dentro de cada término, iniciando por las que están dentro de los paréntesis:

- Primero productos y divisiones dentro de los paréntesis.

$$\overset{1^{er}\text{ término}}{3}+\overset{2^{do}\text{ término}}{\frac{1}{7}\left(9-\frac{6}{3}\right)^2}-\overset{3^{er}\text{ término}}{\frac{(1-3)^2}{4}}+\overset{4^{to}\text{ término}}{4\sqrt{(15-6)}}+\overset{5^{to}\text{ término}}{8}=$$

- Luego las sumas y restas dentro de los paréntesis.

$$\overset{1^{er}\text{ término}}{3}+\overset{2^{do}\text{ término}}{\frac{1}{7}(7)^2}-\overset{3^{er}\text{ término}}{\frac{(-2)^2}{4}}+\overset{4^{to}\text{ término}}{4\sqrt{(9)}}+\overset{5^{to}\text{ término}}{8}=$$

- Ahora se continua con las operaciones que están fuera de los paréntesis, en este caso dos potencias y una raíz cuadrada, para finalizar con los productos y cocientes dentro de cada término:

$$\overset{1^{er}\text{ término}}{3}+\overset{2^{do}\text{ término}}{\frac{1}{7}\cdot49}-\overset{3^{er}\text{ término}}{\frac{4}{4}}+\overset{4^{to}\text{ término}}{4\cdot3}+\overset{5^{to}\text{ término}}{8}=$$

$$\overset{1^{er}\text{ término}}{3}+\overset{2^{do}\text{ término}}{7}-\overset{3^{er}\text{ término}}{1}+\overset{4^{to}\text{ término}}{12}+\overset{5^{to}\text{ término}}{8}=\boxed{29}$$

Tercer paso – Sumar y restar cada término. De esa manera:

$$3+\frac{1}{7}\left(3\cdot3-\frac{6}{3}\right)^2-\frac{(1-3)^2}{4}+4\sqrt{(15-6)}+\frac{24}{3}=29$$

1.2.1 Términos semejantes

Los números o producto de números dentro de cada término algunas veces involucran factores simbolizados por letras o *factores literales*. Los términos semejantes se llaman así porque cada uno de ellos tendrá exactamente los mismos factores literales, cada uno de ellos con el mismo exponente. Cuando dos o más términos poseen los mismos factores literales se pueden sumar o restar sus factores numéricos conocidos, manteniendo en el resultado los mismos factores literales.

Ejemplo:

$$\overset{\text{factor numérico}}{[4]}\overset{\text{factor literal}}{[ax]}+3a-9ax-ax^2=\overset{\text{términos semejantes}}{[4ax-9ax]}+\overset{\text{términos no semejantes}}{\left[3a-ax^2\right]}$$

$$4ax+3a-9ax-ax^2=\overset{\text{suma de factores numéricos}}{-5}\;\overset{\text{factor literal}}{ax}+3a-ax^2$$

Ejercitación N°1

A) Resuelva las siguientes sumas y restas de fracciones para obtener el valor de x:

$$a)x=\frac{3}{8}+\frac{9}{8} \qquad b)x=\frac{1}{\pi}-\pi \qquad c)x=\frac{4}{2}+\frac{t}{4}-\frac{6}{2}$$

$$d)x=\frac{R}{4}-\frac{1}{R} \qquad e)x=\frac{15}{2}+\frac{-3}{2} \qquad f)x=\frac{3}{p^2}+\frac{1}{p}$$

B) Resuelva las siguientes multiplicaciones entre fracciones para obtener el valor de y:

$$a)y=\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{8} \qquad d)y=\frac{1}{\pi}\cdot(3x+1) \qquad g)y=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{8x}{4z}\cdot\frac{(z-5)^2}{2(2-x)}$$

$$b)y=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{5} \qquad e)\frac{5}{2x}\cdot\frac{1}{x^2}=y \qquad h)y=\frac{x}{2}\cdot\frac{(x+\pi)}{2+a}\cdot(x-\pi)$$

$$c)y=\frac{R}{4}\cdot\left(-\frac{1}{R}\right)\cdot\frac{1}{2} \qquad f)y=\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2x-1}\right) \qquad i)\frac{3}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=y$$

C) Resuelva las siguientes divisiones fraccionarias y encuentre el valor de z:

$$a)z=\frac{6}{2}\div\frac{1}{3} \qquad d)z=\frac{a^2}{2b}\div\frac{3a}{6b^3} \qquad g)z=\left[\frac{3a^2}{2}\div 4\frac{a}{3}\right]\div\frac{6a}{3x^2}$$

$$b)-\frac{x}{3}\div\frac{9y}{5\pi}=z \qquad e)z=\frac{1-y^2}{1+y}\div\frac{1-y}{2} \qquad h)z=\frac{c-d}{3cd}\div\left(-\frac{2c+4d}{4d}\right)$$

$$c)z=\frac{\pi}{4}\div\frac{3\pi}{2} \qquad f)+\frac{2x+y}{x-y}\div\frac{4}{2x-y}=z \qquad i)z=\frac{3}{x^2}\div\frac{1}{x}$$

D) Separe en términos cada expresión y resuelva las siguientes operaciones combinadas para conocer cuál es el valor de w:

$$a)w=\left[\frac{1}{2}\cdot(-2)^2\right]\div 2+\sqrt{1-\frac{3}{4}}\cdot(-3)^3+\left(3\cdot\sqrt[3]{64}\right)\cdot\frac{5}{6}=$$

$$b)w=(-12)^2+\left(-\frac{1}{9}\right)^{-1}+\frac{(1-3)^2}{4}(-1)^3-5(1-(-4+3))^{-1}=$$

$$c)\left[(1-7)^2\right]^2+\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}+(-3)\left(\frac{2}{5}\right)-1=w$$

$$d)w=\left[1-(2-6)^2\right]+(-6)^2+\sqrt{4\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}+(-3)^3+\left[\left(\frac{2}{3}\right)-1\right]^2=$$

$$e)w=\frac{1}{4}-\left\{(-2)^3-\left[\frac{1}{2}-\sqrt[3]{\left(3-\frac{9}{4}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}\right]+\left[\left(\frac{3}{\sqrt{16}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(4-\sqrt[3]{125}\right)\right]^2\right\}=$$

E) Reduzca las siguientes expresiones luego de identificar sus términos semejantes hasta hallar una expresión para v:

$$a)-6x+3x^2-1+x=v \qquad d)2ab+5cd+3cba-ad=v$$

$$b)v=4-2x^3+3x^2+\frac{1}{3}x^3 \qquad e)v=3(x+y)-5(x+y)+2(x-y)$$

$$c)v=\left[5y+\frac{1}{3}y^2+5\right]+\left[-9+\frac{1}{3}y-y^2\right] \qquad f)v=\left[6ab-4ab^2-ab^3\right]-\left[ab^2+5ab^3+\frac{1}{2}ab\right]$$

2. Operaciones con polinomios

2.1.1 Producto de un monomio por un polinomio:

Para realizar el producto de un monomio por un polinomio se debe multiplicar cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo:

$$\overset{\text{monomio}}{4x} \cdot \overset{\text{polinomio}}{\left(3x+6y-2\right)} = \overset{\text{se distribuye el monomio sobre cada término del polinomio}}{4x\cdot x+4x\cdot 6y-4x\cdot 2} = 4x^2+24xy-8x$$

2.1.2 Producto entre polinomios:

Este producto requiere multiplicar cada término de un polinomio con cada uno de los términos de un segundo polinomio y luego sumar términos semejantes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\left(7y-3x\right)\left(2x+1\right) &= \overset{\text{cada término del 1}^{\text{er}}\text{ polinomio}}{7y\left(2x+1\right)} - \overset{\text{se distribuye en el 2}^{\text{do}}\text{ polinomio}}{3x\left(2x+1\right)} \\ &= \overset{\text{se completa la}}{7y\cdot 2x+7x\cdot 1}+\overset{\text{distribución de términos}}{\left(-3x\right)\cdot 2x+\left(-3x\right)\cdot 1} \\ &= 14xy+\left[7x\right]-6x^2-\left[3x\right] = \overset{\text{términos semejantes}}{7x-3x} +14xy-6x^2 \\ \left(7y-3x\right)\left(2x+1\right) &= 4x+14xy-6x^2\end{aligned}$$

2.1.3 División de un polinomio por un monomio

Para realizar esta operación se debe dividir cada término del polinomio por el monomio y luego, de ser posible, simplificar factores comunes en numerador y denominador de cada término.

Ejemplo:

$$\frac{\overbrace{2pq^2-qr^3-3r}^{\text{términos del polinomio}}}{\underset{\text{monomio}}{qr}} = \overbrace{\frac{2pq^2}{qr}-\frac{qr^3}{qr}-\frac{3r}{qr}}^{\text{distribuir el monomio en cada término}} = \underbrace{\frac{2pq\cancel{q}}{\cancel{q}r}-\frac{\cancel{q}\cancel{r}r^2}{\cancel{q}\cancel{r}}-\frac{3\cancel{r}}{q\cancel{r}}}_{\text{simplificar factores comunes}} = \underbrace{\frac{2pq}{qr}-r^2-\frac{3}{q}}_{\text{resultado final}}$$

2.2 Casos de Factoreo

2.2.1 Factor común entre varios términos

En un polinomio se llama factor o divisor común a aquel que se halla presente en todos sus términos, el factor común puede ser numérico y/o literal. Para ubicarlo se debe realizar un procedimiento como el siguiente:

1er paso: Determinar por simple inspección que factor numérico se halla presente en cada término del polinomio;

2do paso: Analizar cada término y obtener los factores literales que son comunes entre todos ellos;

3er paso: Dividir cada término del polinomio en el producto entre los factores comunes detectados previamente.

4to paso: Expresar el resultado indicando el producto del factor común obtenido en los pasos 1 y 2 por el resultado del paso 3.

Ejemplo:

$$6x^2y^2-3xy^3 \rightarrow \overbrace{2\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{x}\cdot x\cdot\boxed{y^2}-\boxed{3}\cdot\boxed{x}\cdot y\cdot\boxed{y^2}}^{\text{1er y 2do paso}}$$

Luego

$$\overbrace{\frac{6x^2y^2-3xy^3}{\underset{\text{producto entre los factores comúnes numérico y literales}}{3xy^2}}=\frac{6x^2y^2}{3xy^2}-\frac{3xy^3}{3xy^2}}^{\text{3er paso}}=\boxed{2x-y}$$

Finalmente:

$$6x^2y^2-3xy^3=\underbrace{3xy^2\left(2x+y\right)}_{\text{4to paso}}$$

2.2.2 Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es justamente una resta entre dos factores elevados a la segunda potencia que puede expresarse además como el producto de dos binomios, como se indica en al siguiente formula:

$$x^2-y^2=\left(x+y\right)\left(x-y\right)$$

Es importante detenerse en la ubicación, dentro de la formula, del signo menos. El segundo término "a²" es el que lo posee y por ello el factor "a" es el que seguirá manteniéndolo al realizar el producto posterior, según dicta la expresión.

Ejemplo:

$$\overbrace{9r^2-4q^2}^{\text{el polinomio debe tener formato similar al de la fórmula}}=\overbrace{\left(\underset{x}{3r}\right)^2-\left(\underset{y}{2q}\right)^2}^{\text{el formato es similar}}=\left(\underbrace{3r+2q}_{\text{(x+y)}}\right)\left(\underbrace{3r-2q}_{\text{(x-y)}}\right)$$

2.2.3 Cuadrado y cubo de un binomio

El cuadrado de un binomio es: $\left(x+y\right)^2=x^2+2xy+y^2$

El cubo de un binomio es: $\left(x+y\right)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

Ejercitación N°2

A) Realice las siguientes multiplicaciones

$a) 4\cdot\left(9x-\frac{y}{4}\right)$ $\quad d) -4x^2\cdot\left(3-\frac{1}{2}x+x^2\right)$

$b) \frac{\pi r}{h}\cdot(rh+2h)$ $\quad e) -ab\cdot(ab-b)$

$c) 9y\cdot\left(\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}\right)$ $\quad f) 0,5xy\cdot(-xyz+2xy+0,5xy)$

B) Efectúe las multiplicaciones que se indican a continuación

$a) (8y-2x)\cdot(3x-1)$ $\quad d) (2-ab)\cdot(2ab-b)$

$b) (8x^2+12x+4)\cdot\left(\frac{1}{4}x-x^2\right)$ $\quad e) \frac{(5p-2)\cdot(2p-1)}{(p+1)}\cdot(p+1)$

$c) (9t-1)\cdot(1+t+t^2)$ $\quad f) (xz-2xyz+xy)\cdot\left(\frac{1}{2}xy+xyz-x\right)$

C) Realice las siguientes divisiones

$a) \frac{9x^3-8x^2+x-1}{3}$ $\quad b) \frac{9x^2y-36xy^2}{9xy}$ $\quad c) \frac{6z^3+4z^2+2z}{-2z}$

$d) \frac{2\pi r+2\pi R}{2\pi}$ $\quad e) \frac{pq-qs}{-q}+q$ $\quad f) \frac{6z^3y-12z^2y^2+3zy}{3zy}$

D) Halle el factor común para cada polinomio dado

$a) 7s^2t^2-7st$ $\quad d) 10xy^2-40x^2yz+10zxy$

$b) 4\pi R^2-2\pi Rr^2$ $\quad e) pqr-pq^2r-q^2r^2$

$c) 12bc^2-4abc+32a^2c^3$ $\quad f) 5ab^2-ab+10a^2b$

E) Descomponga en factores los siguientes polinomios

$a) 9y^2x^2-25z^2$ $\quad b) \pi^2R^2-4r^2$ $\quad c) 5abc^4-80ab$

$d) 3m^2n^2-25p^2$ $\quad e) \frac{9}{4}x^2-\frac{16}{4}y^2$ $\quad f) 0,04a^2b-0,49bc^2$

F) Resuelva los siguientes ejercicios aplicando las fórmulas de cuadrado y cubo de un binomio

$a) (x+2t)^2$ $\quad b) (5a-2c)^3$ $\quad c) (w-3)^3$

$d) (-3a^2b-5m^3)^3$ $\quad e) \left(\sqrt{z}-\frac{y}{2}\right)^2$ $\quad f) 16x^2+16x+4$

3. Resolución de ecuaciones

Ecuación matemática: Es una relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas llamadas miembros de la ecuación. Cada miembro puede contener monomios o polinomios con factores numéricos y literales. Si dentro de los términos de una o ambas expresiones se tiene un factor literal de valor desconocido este se conocerá como incógnita de la ecuación, los demás factores literales se llaman parámetros de la ecuación:

- Factores numéricos: Son números reales conocidos como por ejemplo $4, -18, \pi, \frac{2}{3}, \sqrt{9}$, etc.
- Parámetros: Son factores numéricos expresados en forma literal por diversas razones, como por ejemplo números de gran extensión poco prácticos al escribirlos ($\frac{12597}{657}$, -2.328.32,05, e^{-628}) por lo que son simbolizados de manera abstracta con las primeras letras del alfabeto.
- Incógnita: Es un factor literal desconocido, por lo cual se busca averiguar su valor. La incógnita o variable, suele ser reconocida por ser explícitamente indicada o, caso contrario, por estar simbolizada por una letra ubicada al final del alfabeto.

Ejemplo:

$$\overbrace{\underbrace{4}_{\text{factor numérico}} - \underbrace{x}_{\text{incógnita}} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{factor numérico}} \underbrace{c}_{\text{parámetro}}}^{\text{1er miembro}} = \overbrace{\underbrace{\sqrt{4}}_{\text{factor numérico}} \underbrace{x}_{\text{incógnita}}}^{\text{2do miembro}}$$

La presencia de la incógnita dentro de la ecuación permitirá descubrir su valor numérico.

3.1 Despeje de ecuaciones

Despejar una ecuación es el procedimiento mediante el cual se descubre el valor de la incógnita de acuerdo con los demás valores presentes en la ecuación. Similarmente a la resolución de expresiones algebraicas, el proceso de despeje requiere cierto orden en los pasos a realizar.

3.1.1 Resolución de ecuaciones con una incógnita:

- 1er paso: Reducir, de ser posible, la expresión algebraica de cada miembro de la ecuación.
- 2do paso: Separar en términos ambos miembros y reconocer términos semejantes. Es posible que haya uno o más términos donde se halle la incógnita.
- 3er paso: Agrupar los términos donde se halle la incógnita en uno solo de los miembros. Por ejemplo:

  * En caso de que se hallen términos con la variable en el 2do miembro, llevarlos todos al primer miembro:

  - Si la incógnita se halla en un término que suma en el 2do miembro, pasar el término completo restando al 1er miembro. Si el término está restando pasará sumando hacia el otro lado.

  * Los demás términos sin la incógnita se llevan al otro miembro siguiendo el mismo cambio de signos.
- 4to paso: Sacar como factor común a la incógnita de la ecuación. De esta manera se forma un único término en el 1er miembro, donde esta estará siendo multiplicada y/o dividida por los demás factores, así como también puede estar dentro de una raíz o elevada a una potencia entera.
- 5to paso: despejar la incógnita:

  1) Lo que multiplica la variable pasará al 2do miembro dividiendo a todos sus términos;
  2) Lo que divide la variable pasará al otro miembro multiplicando a todos sus términos;
  3) Pasar el grado de la raíz que afecta a la incógnita como potencia de todo el 2do miembro;
  4) Pasar la potencia de la variable como raíz de todo el 2do miembro.
- 6to paso: Resolver la expresión algebraica presente en el 2do miembro.
- 7mo paso: verificar el valor hallado reemplazándolo en lugar de la incógnita.

Ejemplo: Resuelva la siguiente ecuación con una sola incógnita:

$$4x^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{2}x^2+11+\frac{3}{2}x^2$$

1er paso:

$$4x^2+\overset{\text{se reduce el 1er miembro}}{\left(-\frac{3}{3}\right)}=\overset{\text{se reduce el 2do miembro}}{(1)x^2}+11$$

2do paso:

$$\overset{\text{término en x}^2}{4x^2}+\underset{\text{término numérico}}{(-1)}=\overset{\text{término en x}^2}{x^2}+\underset{\text{término numérico}}{11}$$

3er paso:

$$4x^2+\underset{\text{pasa restando al 2do miembro}}{(-1)}=\overset{\text{pasa restando al 1er miembro}}{x^2}+11$$

$$4x^2-x^2=11-(-1)$$

4to paso:

$$\underbrace{\overbrace{x^2(4-1)}^{\text{sacando factor común a x}^2}}_{\text{queda un único término en el 1er miembro}}=11-(-1)$$

5to paso:

$$x^2\underset{\text{pasa dividiendo al 2do miembro}}{(4-1)}=11+1$$

$$\overset{\text{la potencia pasa extrayendo la raiz del 2do miembro}}{x^2}=\frac{11+1}{(4-1)}$$

$$x=\sqrt[2]{\frac{11+1}{(4-1)}}$$

6to paso:

$$x=\overbrace{\sqrt[2]{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}}^{\text{se resuelve el 2do miembro}}$$

Finalmente, conociendo las propiedades de la operación raíz cuadrada, se conoce los valores de la incógnita que hacen cumplir la ecuación:

$$\boxed{x_1=2}\quad y\quad \boxed{x_2=-2}$$

Podemos verificar el resultado reemplazando algún valor hallado en la ecuación inicial y resolver algebraicamente cada uno de los miembros para verificar la igualdad. Reemplazar significa sustituir o cambiar el valor de x por el resultado hallado. En este caso debe tomarse la ecuación inicial y donde veamos la x sustituirla por ejemplo con el número 2:

$$4\underbrace{(2)^2}_{\text{se sustituye por 2}}+\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{2}\underbrace{(2)^2}_{\text{se sustituye por 2}}+11+\frac{3}{2}\underbrace{(2)^2}_{\text{se sustituye por 2}}$$

$$4\cdot 4+(-1)=-\frac{1}{2}\cdot 4+11+\frac{3}{2}\cdot 4$$
$$16-1=-2+11+6$$
$$\underbrace{\boxed{15=15}}_{\text{se verifica la igualdad sin requerirse despejar}}$$

Ejercitación N°3

A) Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita

$a)-x+6-10=7$

$b)4x+11=5-x$

$c)\dfrac{c}{10}=\dfrac{c-12}{6}$

$d)10z-25+8z=-33$

$e)\left(5t-\dfrac{2}{3}\right)+2t=10t-\dfrac{5}{3}$

$f)\dfrac{3x}{4}-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3}{4}$

$g)\dfrac{x-4}{-2}-1=\dfrac{x}{2}+1$

$h)\dfrac{2r+4}{12}=\dfrac{r+4}{7}$

$i)10+\dfrac{y}{6}=\dfrac{y}{3}-4$

$j)1-\dfrac{2m-5}{3}=\dfrac{m+3}{2}$

$k)13\sqrt{y}=6\sqrt{y}-21$

$l)\left(\dfrac{\frac{3}{2}x^2-\frac{x^2}{2}}{x}\right)=7x-1$

$m)6(4x-7)-5(2x-5)=3$

$n)2(x-1)+\dfrac{1}{2}=-2+\dfrac{x}{3}$

$ñ)1-\left[4-(x+1)\right]=\dfrac{3}{2}(2x+1)$

$o)4\left[(x-1)+2(1-x)\right]+x=8$

$p)(s+3)(s+5)+s(10-s)=11s+1$

$q)5x-4\left[2-(6-7x)\right]=2x$

3.1.2 Ecuaciones de 2do grado con una incógnita

Las ecuaciones de 2do grado se llaman así por el exponente 2 al que esta elevada la incógnita. Las ecuaciones de grado 2 se caracterizan por tener hasta dos valores posibles que son solución de la ecuación. Esta ecuación toma la siguiente forma general que siempre está igualada a cero:

$$ax^2+bx+c=0$$

Cada uno de los términos de la ecuación tiene un nombre de acuerdo con el exponente de la variable en cada uno de ellos:

$$\overbrace{ax^2}^{\text{término cuadrático}}+\overbrace{bx}^{\text{término lineal}}+\overbrace{c}^{\text{término independiente}}=0$$

Los factores literales a, b y c son parámetros llamados coeficientes de la ecuación de acuerdo con el término en el que se encuentran.

Si quisiéramos despejar esta ecuación siguiendo todos los pasos ya vistos nos encontraríamos imposibilitados de completar el 5to paso ya que todos los términos en el 1er miembro no serían semejantes. En dicho caso la solución no es tan directa debe utilizarse un método conocido como "Completamiento de Cuadrados":

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Despejamos el término independiente y extraemos el término cuadrático:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumamos ambos miembros una cantidad igual a $(b/2a)^2$. De esta manera formamos en el 1er miembro un trinomio cuadrado perfecto, sin alterar la relaciona de igualdad entre ambos miembros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{c}{a} + \boxed{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

Reducimos el 1er miembro sabiendo que el trinomio cuadrado perfecto es igual al cuadrado de un binomio, en este caso:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Procedemos a despejar la variable x de acuerdo al 5to paso:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

Cabe recordar las propiedades de la radicación que nos permite saber que existen dos resultados posibles para esa operación matemática, uno con signo positivo y el otro con signo negativo. Justamente esa particularidad es la que nos permitirá encontrar los dos valores posibles de la incógnita:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

Esta expresión no es otra que la conocida Fórmula de Baskhara, y sirve para hallar los dos valores de la incógnita en una ecuación de 2do grado

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Los dos valores posibles son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si la ecuación de 2do grado no estuviera completa, es decir, para casos en los cuales b=0 o c=0 el método de resolución es mucho más sencillo:

- Caso b=0:

$$ax^2 + c = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

En este caso la solución solo es posible para valores negativos de "a" o de "c".
- Caso c=0:

$$ax^2 + bx = 0$$

Sacando factor común x:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Esta expresión tiene un producto en el primer miembro y puede satisfacerse cuando $x = 0$ o cuando $(ax + b) = 0$; por lo tanto:

$$\boxed{x_1 = 0} \qquad y \qquad \boxed{x_2 = -\frac{b}{a}}$$

- Caso b=c=0:

$$ax^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{x_{1,2} = \sqrt{\frac{0}{a}} = 0}$$

3.1.3 Resolución de ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas

Si intentáramos resolver una ecuación con dos incógnitas, x e y, como, por ejemplo:

$$4x + y = 0$$

Se hallará que $x = -y/4$. Es decir que la variable x podría tomar todo un valor para cada valor de y. Si y=1 entonces x= -1/4; si y=-π entonces x=π/4, etc. Se dice así que el valor de x está en función del valor de la variable y.

La situación cambia si tenemos dos ecuaciones donde las dos incógnitas son las mismas. Es decir, si tenemos al menos una ecuación por cada incógnita se podrá encontrar un único valor solución para cada variable. De esa manera se forma un *sistema de ecuaciones* que permite encontrar los valores que satisfacen ambas igualdades.

Para resolver ecuaciones de 1era grado y 2 incógnitas se requiere resolver un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Una vez establecido el sistema el procedimiento a utilizar es el siguiente:
- 1er paso: Despejar una de las variables de la 1ra de las ecuaciones.
- 2do paso: Reemplazar ese resultado en la 2da ecuación. De esta manera se forma una expresión algebraica con una sola incógnita que puede ser reducida, despejando dicha incógnita hasta encontrar un único válido para la 2da variable.
- 3er paso: Reemplazar ese valor de la 2da variable en la primera de las ecuaciones para hallar asi el valor de la 1ra incógnita.
- 4to paso: verificar reemplazando ambos valores obtenidos en ambas ecuaciones, para verificar la validez de ambas igualdades.

Los sistemas de ecuaciones se clasifican según las soluciones posibles, determinadas por la relación entre los parámetros de estas, en:

- Sistema determinado: Existe un único par de valores que solucionan el sistema.
- Sistema indeterminado: Existe un número indeterminado de soluciones posibles. Reconocibles porque una ecuación es múltiplo de la otra.
- Sistema incompatible: No existe solución posible.

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2t - s = 7 & \rightarrow 1^{\text{ra}} \text{ ecuación} \\ 4t + s = 4 & \rightarrow 2^{\text{da}} \text{ ecuación} \end{cases}$$

- 1er paso: Despejar t.

$$t = \frac{7+s}{2} \quad \rightarrow 1^{\text{ra}} \text{ incógnita despejada}$$

- 2do paso: Hallar el valor de s resolviendo la operación algebraica.

$$4\overbrace{\left(\frac{7+s}{2}\right)}^{\text{se reemplaza en la 2da ecuación}} + s = 4$$

$$\frac{4\cdot 7}{2} + \frac{4s}{2} = 4$$

$$14 + 2s = 4$$

$$\boxed{s = -5}$$

- 3er paso: Hallar el valor de t.

$$2t - \overbrace{(-5)}^{\text{se reemplaza en la 2da ecuación}} = 7$$

$$t = \frac{7-5}{2} \rightarrow \boxed{t = 1}$$

- 4to paso: verificación del resultado

$$\begin{cases} 2(1) - (-5) = 7 \\ 4(1) + (-5) = 4 \end{cases}$$

Ejercitación N°4

A) Encuentre los valores de la incógnita x que satisfacen cada ecuación:

$a) 3x^2 + 4x - 5 = 0$ $\quad$ $d) n^2 + (n+1)^2 = 25$

$b) x^2 - 2x = 10$ $\quad$ $e) (x-4)(x+4) = 0$

$c) x^2 = 4x - 3$ $\quad$ $f) 3b - 40 = -b^2$

B) Encuentre los valores de las incógnitas x e y que satisfacen cada sistema de ecuaciones:

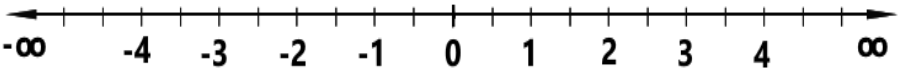
$a)\begin{cases} 3x - 5 = 21 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ $\quad$ $d)\begin{cases} 7c - 3d = 23 \\ -2c - 3d = 5 \end{cases}$

$b)\begin{cases} 7a + b = 22 \\ 5a + b = 14 \end{cases}$ $\quad$ $e)\begin{cases} m + 4n = 6 \\ m - 2n = 18 \end{cases}$

$c)\begin{cases} 7t = 3 - 2h \\ -17 = 17 + 2h \end{cases}$ $\quad$ $f)\begin{cases} 2x = 3y + 14 \\ x - y = 10 \end{cases}$

4. Recta numérica

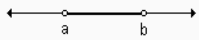
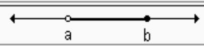
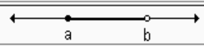
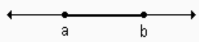
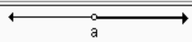
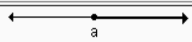
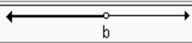
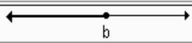
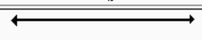
La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional o línea recta que contiene todos los números reales representados en ella. A la derecha del cero se ubican los números reales positivos y a su izquierda los números reales negativos, siendo mayor aquel número que se ubique más hacia la derecha.



La recta numérica sirve para ubicar y representar valores numéricos o un conjunto de ellos en forma gráfica.

4.1 Formas de representación

Además de la forma gráfica, los conjuntos numéricos pueden representarse de diferentes maneras:

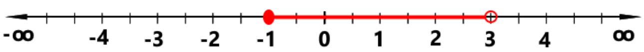
Nombre del intervalo	Notación conjuntista	Notación de intervalos	Representación gráfica
Abierto	$\{x/a < x < b\}$	(a,b)	
Semicerrado a derecha	$\{x/a < x \leq b\}$	(a,b]	
Semicerrado a izquierda	$\{x/a \leq x < b\}$	[a,b)	
Cerrado	$\{x/a \leq x \leq b\}$	[a,b]	
Infinito abierto a izquierda	$\{x/x > a\}$	(a, ∞)	
Infinito cerrado a izquierda	$\{x/x \geq a\}$	[a, ∞)	
Infinito abierto a derecha	$\{x/x < b\}$	(- ∞ ,b)	
Infinito cerrado a derecha	$\{x/x \leq b\}$	(- ∞ ,b]	
Infinito	$\{x/x \in \mathbb{R}\}$	(- ∞ ,+ ∞)	

Ejemplo: Represente en forma gráfica y en notación de intervalos al conjunto $\{x/-1 \leq x < 3\}$:

* En notación de intervalos la expresión es la siguiente: Debido a que la variable puede tomar el valor (-1), usaremos un corchete a la izquierda del intervalo y un paréntesis a la derecha porque la variable debe ser menor a 3, formando así un conjunto semicerrado:

[-1, 3)

* La representación gráfica es la siguiente:



Se usó un círculo lleno en la posición del (-1) y un círculo vacío en la posición del 3.

4.2 Operaciones entre conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos pueden:

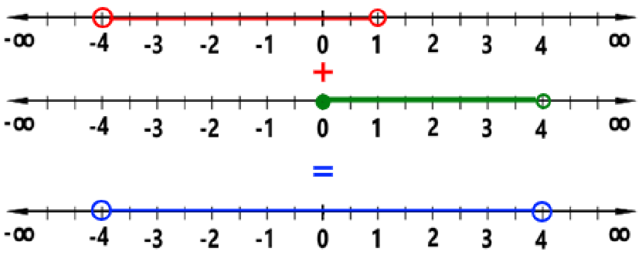
- Sumarse o unirse, esta operación se llama unión y está representada por el símbolo $\cup$. Consiste en combinar dos o más conjuntos y formar un único conjunto con todos los elementos que les conforman.

- Sustraerse, es decir formar un conjunto que contenga todos los elementos o números no comunes a los conjuntos originales.

- Intersectarse, operación simbolizada por el operador $\cap$. El resultado de la intersección es un conjunto que contenga los números que son comunes a los conjuntos originales.

Ejemplo: Resuelva la siguiente operación entre conjuntos: $(-4;1)\cup[1;4)$

Para encontrar la solución debe tenerse en cuenta que el símbolo entre ambos intervalos es el de unión de conjuntos; por ello, al usar la representación gráfica, se obtiene la respuesta buscada:



La solución en notación de intervalos es:

$$(-4;1)\cup[1;4)=\boxed{(-4;4)}$$

5. Inecuaciones

Las inecuaciones son relaciones de desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Es decir, el 1er miembro será mayor al 2do miembro:

$$x+a \overset{\text{mayor}}{>} 3+4\frac{\pi}{3}$$

O el 1er miembro será menor al 2do miembro:

$$b-y \underset{\text{menor}}{<} 144$$

Al igual que las ecuaciones, se caracterizan por poder tener factores numéricos, parámetros e incógnitas. Los métodos de despeje y resolución de estas son similares a los de las ecuaciones, con la diferencia que, se debe estar atento a la validez de la desigualdad. Una de las pocas condiciones para que la desigualdad se invierta (pase de “mayor a” a “menor que”, o viceversa) es el multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo.

Resolviendo una inecuación con una sola incógnita:

Una vez que uno de los miembros contenga un único término conteniendo la variable y se proceda al paso final para despejarla, considerar lo siguiente:

1) El factor que multiplique a la variable pasará al 2do miembro dividiendo a todos sus términos. En caso de ser un número negativo, además cambiará el sentido de la desigualdad;
2) Lo que divide la variable pasará al otro miembro multiplicando a todos sus términos. En caso de ser un número negativo también cambiará el sentido de la desigualdad al mismo tiempo;
3) En el caso de incógnitas elevadas a alguna potencia o raíz, obtener el resultado requiere un análisis más detallado de los signos de cada miembro y el grado del exponente.
4) Una vez despejada la variable reducir la expresión algebraica presente en el 2do miembro para hallar el *conjunto de valores numéricos* que puede tomar la incógnita para satisfacer la inecuación.
5) Verificar el resultado escogiendo un valor dentro del conjunto solución y reemplazándolo en lugar de la incógnita. La inecuación debe cumplirse sin necesidad de despejar.

Ejemplo:

$$4x-8<5x+1$$

La desigualdad o inecuación posee varios términos en cada miembro, algunos de ellos semejantes. Se resuelve como si se tratara de una ecuación ordinaria.

$$4x<5x+1+8$$
$$4x-5x<9$$
$$(4-5)x<9$$

En este momento tenemos un único término con la variable en él dentro del 1er miembro. En esta instancia se debe prestar atención para el posible cambio de signo de la desigualdad. Al poseer un producto con un factor negativo este pasará al otro miembro dividiendo, con el consecuente cambio de signo de “menos que” a “mayor a”:

$$\underbrace{(-1)}_{\substack{\text{Factor negativo.}\\\text{Al pasar al otro miembro}\\\text{cambia el signo de la desigualdad.}}} \qquad x<9$$

$$x \underset{\text{se invierte}}{>} \frac{9}{-1}$$

El resultado es “la incógnita puede tomar todos los números reales mayores a (-9)”.

$$\boxed{x>-9}$$

6. Valor absoluto

El valor absoluto o módulo de un número es su valor numérico sin tener en cuenta su signo. Por ejemplo, el valor absoluto de +3 o de -3 es igualmente 3.
En el caso de los números reales, que son los que se utilizarán en la Cátedra, el valor absoluto está definido de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

$$|0| = 0$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ si } b \neq 0$$
$$|a+b| \leq |a| + |b|$$
$$|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

Ejemplo:

Halle los valores que satisfacen la siguiente ecuación: $|x+1| = 3$

Por definición de valor absoluto:

$$|x+1| = \begin{cases} (x+1), & \text{si } x \geq 0 \\ -(x+1), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por ello, para $x \geq 0$:

$$(x+1) = 3$$
$$x = 3-1$$
$$\boxed{x = 2}$$

Para $x < 0$:

$$-(x+1) = 3$$
$$x+1 = -3$$
$$\boxed{x = -4}$$

Entonces, tenemos dos valores posibles para la incógnita que deben satisfacer la ecuación, por ello las dos soluciones deben verificarse:

$$|(2)+1| = 3$$
$$|3| = 3$$
$$|(-4)+1| = 3$$
$$|-3| = 3$$

Ejercitación N°5

A) Exprese en las tres notaciones posibles los siguientes conjuntos

$a)(-4;7]$ $\qquad$ $d)\{\alpha/-\pi<\alpha<0\}$

$b)\{t/-\frac{1}{2}\leq t\leq 1\}$ $\qquad$ $e)\{x/0<x\leq\infty\}$

$c)(-\infty;0]$ $\qquad$ $f)[a;b]$

B) Resuelva las siguientes operaciones entre conjuntos:

$a)(-4;1)-[1;4)$

$b)\{x/-4<x<1\}\cap\{x/1\leq x<4\}$

C) Resuelva las siguientes operaciones utilizando la recta numérica y exprese el resultado en notación de intervalos y de conjuntos

$a)(-1;0)\cup[0;1]$ $\qquad$ $d)[2;1)-(0,5;1)$

$b)(0,5;0,5]-(0;1]$ $\qquad$ $e)(-\infty;0)\cup[0;3]-[-4;3]$

$c)(-\infty;1)\cap(0;\infty)$ $\qquad$ $f)\{[0;3]\cap(1;2)\}+[2;3]$

D) Resuelva las siguientes inecuaciones, exprese el resultado en notación de intervalos

$a)4x-7<3x+5$ $\qquad$ $d)2x-5\leq x-2$

$b)-10x+1>8x+5$ $\qquad$ $e)x^2-1\geq 4$

$c)2+3t<5t+1$ $\qquad$ $f)\dfrac{7}{-2s}<3$

E) Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto. Represente gráficamente.

$a)|3x+9|=1$ $\qquad$ $e)\left|\frac{1}{2}x-5\right|=2x$

$b)|4x+2|=x$ $\qquad$ $f)|3x+9|=|x+1|$

$c)\left|\dfrac{x^2-(x+1)^2}{2}\right|=-3$ $\qquad$ $g)|x|<6$

$d)|ax^2+b|=c$ $\qquad$ $h)|x+1|\geq\dfrac{1}{2}$

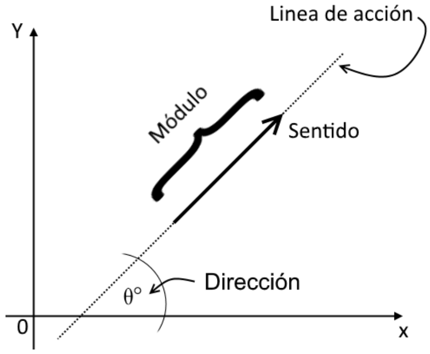
7. Vectores

Las aplicaciones matemáticas con frecuencia se relacionan con magnitudes que poseen tanto magnitud como dirección y sentido. A dichas magnitudes se les reconoce como "vectores".

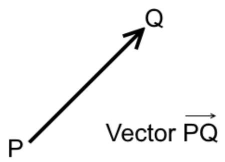
Un vector es un ente abstracto, el cual está caracterizado por tres elementos:

1) Módulo
2) Dirección
3) Sentido

Se puede hallar una forma más clara de interpretarlo, imaginemos a este como una flecha donde su longitud expresa el módulo, la línea sobre la que yace la flecha da la dirección y el sentido está indicado por el extremo de la flecha:

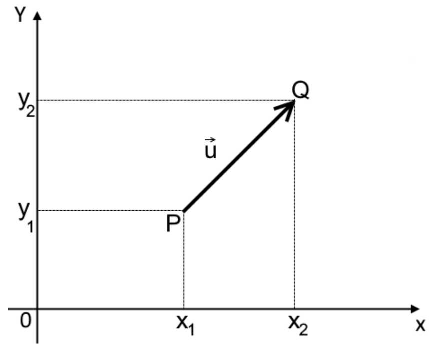


Se llama vector a una entidad caracterizada por tres elementos: Módulo, dirección y sentido. Geométricamente se puede definir como u segmento orientado; en donde el primero de los puntos que lo determinan se llama origen y el segundo punto se llama extremo del vector.



Por observación del vector PQ, deducimos que está caracterizado por: Módulo (longitud de la flecha), Dirección (dada por la línea que contiene la flecha) y Sentido (dado por el extremo de la flecha).

Un vector puede estar en el plano o en el espacio. Por simplicidad, comencemos definiendo la representación de vectores en el plano. En este, los puntos coordenados pueden escribirse como P(x_1; y_1) y Q(x_2; y_2); entonces, el vector $\overrightarrow{PQ}$ se puede ubicar en el plano como lo indica la siguiente figura:



De acuerdo a esta figura definimos lo que se conoce como componentes de un vector:

Se llaman componentes de un vector $\vec{u}$ en el plano, a las proyecciones de este sobre cada uno de los ejes del sistema de coordenadas:

$$u_x = x_2 - x_1 \quad ; \quad u_y = y_2 - y_1$$

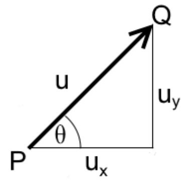
Y podemos representar un vector mediante ambas componentes:

$$\vec{u} = \langle u_x; u_y \rangle$$

Es importante notar que dos vectores serán iguales si y solo si ambos poseen las mismas componentes.

Para calcular el módulo o la magnitud de un vector se utiliza el Teorema de Pitágoras:

$$\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$



Donde $\|u\|$ *o* simplemente u es el módulo o norma del vector $\vec{u}$.

Mientras que para determinar la dirección de un vector se utiliza calcula la tangente trigonométrica:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x}$$

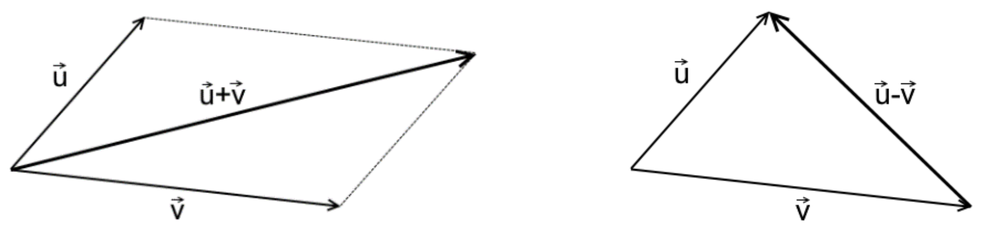
Siendo θ el ángulo en radianes que indica la dirección del vector $\vec{u}$.

7.1 Operaciones entre vectores

Los vectores pueden no estar contenidos en el plano x-y sino estar además contenidos en un espacio de tres dimensiones. En ese caso en lugar de poseer solo dos componentes, poseen una más que indica la altura respecto del plano x-y, que se proyecta sobre un tercer eje llamado eje z.

7.1.1 Sean dos vectores $\vec{u} = \langle u_x; u_y; u_z \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$:

1) La suma de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u} + \vec{v} = \langle u_x + v_x; u_y + v_y; u_z + v_z \rangle$
2) El producto de un escalar k por un vector $\vec{u}$ es otro vector $k\vec{u} = \langle ku_x; ku_y; ku_z \rangle$
3) La resta o diferencia de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u} - \vec{v} = \langle u_x - v_x; u_y - v_y; u_z - v_z \rangle$



7.1.2 Producto entre vectores: existen dos modos de multiplicar vectores, el producto escalar y el producto vectorial:

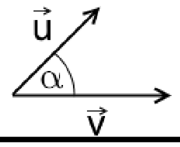
7.1.2.1 Producto Escalar

Se llama producto escalar o producto interno entre dos vectores $\vec{u} = \langle u_x; u_y; u_z \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$ al escalar obtenido como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Este escalar también puede calcularse si se conoce el módulo de ambos vectores y el ángulo α formado entre ambos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| cos\alpha$$

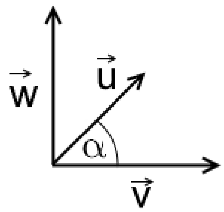


7.1.2.2 Producto vectorial

Se llama producto vectorial o producto exterior entre dos vectores $\vec{u} = \langle u_x; u_y; u_z \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_x; v_y; v_z \rangle$ al vector $\vec{w}$ obtenido como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = \langle u_y v_z - u_z v_y; u_z v_x - u_x v_z; u_x v_y + u_y v_x \rangle$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| sen\alpha$$



<u>**Ejercitación N°6**</u>

1. En los siguientes ejercicios dibuje el vector $\overrightarrow{PQ}$. Luego, calcule las componentes y el módulo del vector:

a) $P = (3,7)$ y $Q = (5,4)$, b) $P = (5,4)$ y $Q = (3,7)$, c) $P = (-5,-3)$ y $Q = (0,3)$,
d) $P = (-2,0)$ y $Q = (0,0)$, e) $P = (0,-3)$ y $Q = (2,4)$, f) $P = (4,6)$ y $Q = (-3,2)$.

2. En los siguientes ejercicios calcule el módulo de cada vector. Luego, grafique a escala el vector y compare el resultado analítico con el gráfico:

a) $\vec{u} = \langle 3; 4 \rangle$, b) $\vec{u} = \langle -2; 5 \rangle$, c) $\vec{v} = \langle 4; 0 \rangle$, d) $\vec{v} = \langle 0; 3 \rangle$, e) $\vec{w} = \langle -3; -1 \rangle$, f) $\vec{u} = \langle -1; -3 \rangle$.

3. Obtenga $\vec{u} + \vec{v}$. Luego, represente gráficamente $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$ en un mismo par de ejes coordenados:

a) $\vec{u} = \langle 2; 4 \rangle, \vec{v} = \langle -3; 5 \rangle$, b) $\vec{u} = \langle 0; 3 \rangle, \vec{v} = \langle -2; 3 \rangle$,
c) $\vec{u} = \langle -3; 0 \rangle, \vec{v} = \langle 4; -5 \rangle$, d) $\vec{u} = \langle 2; 3 \rangle, \vec{v} = \langle -2; -1 \rangle$

4. Obtenga $\vec{u}-\vec{v}$. Luego, represente gráficamente $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ en un mismo par de ejes coordenados:

a) $\vec{u}=\langle -3;-4\rangle, \vec{v}=\langle 6;0\rangle$, b) $\vec{u}=\langle 1;3\rangle, \vec{v}=\langle -3;6\rangle$, c) $\vec{u}=\langle 0;5\rangle, \vec{v}=\langle 2;8\rangle$, d) $\vec{u}=\langle 7;3\rangle, \vec{v}=\langle 3;7\rangle$

5. En los siguientes ejercicios siga los pasos que se detallan a continuación:

a) Grafique los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ a escala.

b) Use el método del paralelogramo para estimar gráficamente el módulo de los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

c) Calcule analíticamente el módulo de $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$.

d) Compare los resultados obtenidos es los incisos b) y c). Ambos DEBEN ser aproximadamente iguales.

I) $\vec{u}=\langle 2;1\rangle, \vec{v}=\langle 1;2\rangle$, II) $\vec{u}=\langle 1;3\rangle, \vec{v}=\langle -2;1\rangle$,
III) $\vec{u}=\langle -3;-2\rangle, \vec{v}=\langle 4;-2\rangle$, IV) $\vec{u}=\langle -5;-1\rangle, \vec{v}=\langle -2;6\rangle$.

6. En los siguientes ejercicios grafique el vector que se requiere en cada inciso. Luego, obtenga las componentes del vector gráfica y analíticamente (tome el ángulo de inclinación con respecto al semieje positivo de x):

a) $\|\vec{u}\|=5$ y ángulo de inclinación 45° , b) $\|\vec{v}\|=10$ y ángulo de inclinación 120°,
c) $\|\vec{w}\|=5$ y ángulo de inclinación 315°, d) $\|\vec{u}\|=9$ y ángulo de inclinación 210°.

7. Calcule el ángulo de inclinación de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}=\langle 1;3\rangle$, b) $\vec{u}=\langle -4;-3\rangle$, c) $\vec{u}=\langle -3;2\rangle$, d) $\vec{u}=\langle 4;-2\rangle$.

8. Dados $\vec{u}\ y\ \vec{v}$, calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}$, $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{v}$ y $\vec{u}\cdot(2\vec{v})$:

a) $\vec{u}=\langle 2;5\rangle, \vec{v}=\langle 4;0\rangle$, b) $\vec{u}=\langle -3;4\rangle, \vec{v}=\langle -5;0\rangle$,
c) $\vec{u}=\langle 2;-7\rangle, \vec{v}=\langle -2;-8\rangle$, d) $\vec{u}=\langle 6;-2\rangle, \vec{v}=\langle 3;-5\rangle$.

9. Calcule el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$:

a) $\vec{u}=\langle 5;1\rangle, \vec{v}=\langle 2;5\rangle$, b) $\vec{u}=\langle 1;3\rangle, \vec{v}=\langle -2;3\rangle$, c) $\vec{u}=\langle -4;5\rangle, \vec{v}=\langle -2;3\rangle$,
d) $\vec{u}=\langle -3;-5\rangle, \vec{v}=\langle 3;-5\rangle$, e) $\vec{u}=\langle 4;1\rangle, \vec{v}=\langle -1;3\rangle$.

10. Dados los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ obtenga $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\times\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{v}$. Luego represente gráficamente, en ejes tridimensionales, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$. Para determinar la dirección y sentido de este último vector, use la regla de la mano derecha:

a) $\vec{u}=\langle 3;2\rangle, \vec{v}=\langle -4;1\rangle$, b) $\vec{u}=\langle -1;5\rangle, \vec{v}=\langle -4;2\rangle$, c) $\vec{u}=\langle -2;3\rangle, \vec{v}=\langle 1;1\rangle$,
d) $\vec{u}=\langle 0;3;2\rangle, \vec{v}=\langle 0;2;0\rangle$, e) $\vec{u}=\langle -1;0;3\rangle, \vec{v}=\langle 3;0;-2\rangle$, f) $\vec{u}=\langle -3;1;-5\rangle, \vec{v}=\langle 0;3;1\rangle$