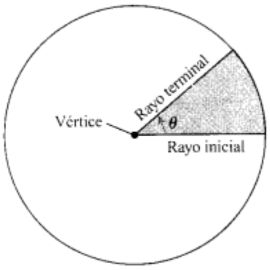
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD TEMÁTICA N° 1

TRIGONOMETRÍA Y VECTORES

Unidad Temática 1: ***Trigonometría y Vectores.***
1)Ángulos y unidades de medición. Definición del radian. 2) Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. 3) Razones trigonométricas. Identidades Trigonométricas. 4) Triángulos oblicuos: Teorema del seno y del coseno. 5) Vectores en el plano: definición geométrica y algebraica. Representación. Magnitud y sentido. 6) Operaciones: Suma y Producto por un escalar. 7) Definición de **i** y **j**. Vectores unitarios. 8) Producto escalar: definición y propiedades. Ángulo entre vectores. Proyección. 9) Generalización a R^3. Definición del vector **k**. 10) Producto vectorial: definición y propiedades. Módulo del producto vectorial: interpretación geométrica. 11) Triple producto escalar: interpretación geométrica.

1) ÁNGULOS Y UNIDADES DE MEDICIÓN. DEFINICIÓN DE RADIÁN



Un ángulo consta de tres partes: un **rayo inicial**, un **rayo terminal** y un **vértice** (el punto de intersección de los rayos), como muestra la figura. Un rayo está en **posición normal** si su rayo inicial coincide con el semieje positivo de x y su vértice está en el origen. Utilizamos letras griegas minúsculas para nombrar ángulos o representar sus medidas. Los ángulos comprendidos entre $0°$ y $90°$ se denominan **agudos** y los ángulos comprendidos entre $90°$ y $180°$ se llaman **obtusos**. Los ángulos **positivos** se miden en el **sentido antihorario** y los **negativos** en el sentido **horario**. Generalmente, se inscribe el ángulo en una circunferencia cuyo radio tiene, por conveniencia, una longitud igual a 1 (uno). Dicha circunferencia se denomina **circunferencia trigonométrica**.

Ejercicios: Realice los siguientes ejercicios graficando los ángulos en una circunferencia trigonométrica.

1. Grafique un ángulo de $0°$, $90°$, $180°$, $45°$ y $135°$. Asigne “agudo”, “obtuso”, “recto” y “llano” según corresponda.
2. Grafique un ángulo de $45°$ negativo. ¿Cuál es su medida tomada en el sentido positivo? Haga lo mismo con un ángulo de $90°$ negativo.

Además de grados, los ángulos pueden medirse en otra unidad denominada **radianes**. El radián es la unidad de medición de ángulos correspondiente al Sistema Internacional (SI). A continuación se da su definición.

Definición: (*radián*)
Si se traza una circunferencia de radio 1 con el vértice del ángulo como su centro, entonces la medida de este ángulo en radianes (*rad*) es la longitud del arco que subtiende el ángulo.

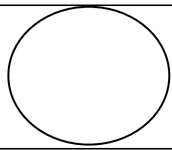
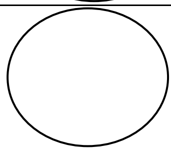
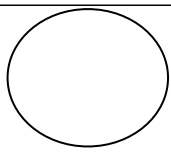
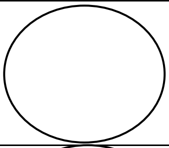
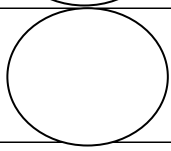
Como el perímetro de un círculo es $2\pi r$, el de la circunferencia trigonométrica es 2π. Esto implica que la medida en radianes de un ángulo que mide $360°$ es 2π. En otras palabras $360° = 2\pi \text{ radianes}$, o bien, dividiendo ambos miembros de la igualdad en 2 se tiene:

$$\boxed{180° = \pi \text{ rad}}$$

Es conveniente conocer las conversiones de los ángulos más usuales (denominados ángulos notables), para ello, resuelva el siguiente ejercicio. ***SIEMPRE*** recuerde estos valores. ***SIEMPRE*** recuerde la porción de circunferencia que representa cada ángulo.

Cátedra: Álgebra y Geometría Analítica
Profesora Adjunta: Lic. Melina Bordcoch

<u>Ejercicio:</u>
Complete la siguiente tabla. En la primera columna aparecen los ángulos medidos en grados. Complete la segunda columna con los respectivos valores medidos en radianes utilizando sólo fracciones de π, ***no utilice decimales***. Por último, represente en la tercera columna el ángulo de cada fila como la porción de la circunferencia trigonométrica correspondiente, sombreando dicha región.

GRADOS	RADIANES (EN FRACCIONES DE π)	PORCIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		
120°		
135°		
150°		
180°		
210°		
225°		
240°		
270°		
300°		
315°		
330°		
360°		

2) TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS Y TEOREMA DE PITÁGORAS

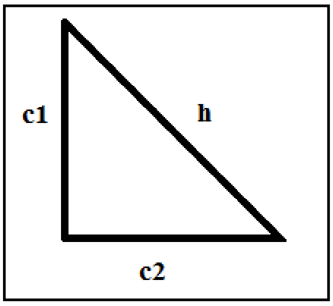


Figura 1: Triángulo rectángulo

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa** (**h**) y los otros dos lados se llaman **catetos** (**c1** y **c2**).

Teorema: (de Pitágoras)
En todo triángulo rectángulo "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". Es decir,

$$\boxed{h^2 = (c1)^2 + (c2)^2}$$

Ejercicios:

1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 5 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa? Represente gráficamente.
2. Dado el triángulo de la Figura 1, calcule la longitud del lado restante según los lados que se dan como dato.

   a) $c1 = 4{,}5 \quad h = 9$ b) $c2 = 6 \quad h = 12$
3. Diga si los siguientes triángulos son rectángulos.

   a) $c1 = 6 \quad c2 = 8 \quad h = 10$ b) $c1 = 9 \quad c2 = 5 \quad h = 11$
4. Proponga un ejemplo de triángulo rectángulo distinto a los enunciados hasta aquí.

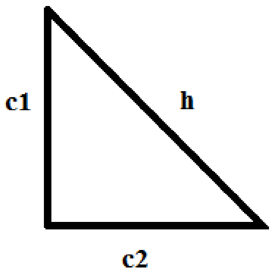
3) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

La trigonometría plana tiene como objetivo resolver triángulos. Cada triángulo está constituido por **seis elementos**: **tres lados y tres ángulos**. Resolver un triángulo significa determinar los elementos desconocidos cuando se tienen algunos datos y ciertas relaciones entre ellos.
Dado cualquier triángulo rectángulo se puede considerar las siguientes divisiones (razones) entre dos cualesquiera lados del mismo. Para el triángulo de la siguiente figura se tendrá:

$$\boxed{\frac{c1}{h}} \quad \boxed{\frac{c1}{c2}}$$

$$\boxed{\frac{c2}{h}} \quad \boxed{\frac{c2}{c1}}$$

$$\boxed{\frac{h}{c1}} \quad \boxed{\frac{h}{c2}}$$



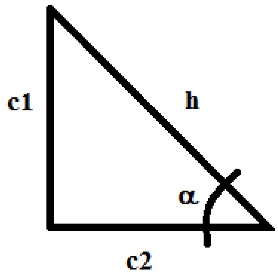
Estas razones no dependen de la longitud de los lados, sino de la medida del ángulo y se las llama **razones trigonométricas**. Sea α uno de los ángulos de un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

Definición: (razones trigonométricas)
En un triángulo rectángulo con a como uno de sus ángulos agudos, las razones trigonométricas se definen como:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

A continuación se muestra un triángulo rectángulo con todos sus lados asignados y un ángulo señalado y junto a la figura se muestran las razones trigonométricas correspondientes.



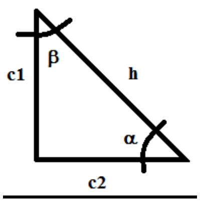
$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{h}} = \frac{c1}{h} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{c.a.}}{\text{h}} = \frac{\text{c2}}{\text{h}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{c.o.}}{\text{c.a.}} = \frac{\text{c1}}{\text{c2.}}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{h.}}{\text{c.o}} = \frac{h}{c1} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{h}}{\text{c.a}} = \frac{\text{h}}{\text{c2}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{c.a.}}{\text{c.o.}} = \frac{\text{c2}}{\text{c1.}}$$

El siguiente ejercicio aplica las definiciones anteriores a un triángulo particular.

Ejercicios: Utilice el triángulo de la figura y resuelva los siguientes ejercicios. Grafique a escala.

1. Suponga el triángulo rectángulo $c1 = 6$ $c2 = 8$ $h = 10$. Calcule las seis razones trigonométricas para α.
2. Suponga el triángulo rectángulo $c1 = 3$ $c2 = 4$ $h = 5$ y obtenga las seis razones trigonométricas para β.



Las razones trigonométricas facilitan la resolución de un triángulo rectángulo. En los ejercicios anteriores, por ejemplo, es posible calcular el valor de los ángulos α y β, ya que conocemos todos sus lados. Tomando el ejercicio N° 1, se tiene:

$$sen\,\alpha = 0{,}6$$

Para encontrar el valor de α se debe "pasar" la operación "sen" hacia "el otro lado del igual". La manera correcta de hacerlo es

$$\alpha = \arcsin(0{,}6)$$

donde "arcsin(0,6)" se lee como "arco seno de 0,6". En la calculadora deberá usar la tecla SHIFT seguida de la tecla SIN seguida a su vez del valor 0,6 y finalmente la tecla = para obtener así:

$$\alpha = 36{,}87°$$

Compruebe que esa es la medida de α usando el transportador sobre el triángulo que Ud. ya dibujó a escala. Como la suma de los ángulos interiores a un triángulo plano es igual a 180° es posible determinar la medida de β del triángulo del ejercicio N°1 restando a 180° el valor de los dos ángulos ya conocidos: el de 90° y α. Entonces:

$$\beta = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha = 90° - 37° = 53°$$

Usando el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas es posible resolver los triángulos rectángulos en base a muy pocos datos. Por ejemplo, para resolver el triángulo $c1 = 3$, $c2 = 6$ calculamos,

$$h = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$$

$$\tan\alpha = \frac{c1}{c2} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \qquad \alpha = \arctan(0{,}5) = 26{,}56°$$

$$\tan\beta = \frac{c2}{c1} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \beta = \arctan(2) = 63{,}44°$$

También podemos considerar el siguiente ejemplo: $c1 = 4 \quad \alpha = 50°$
Una manera de resolver es comenzar por,

$$\tan\alpha = \frac{c1}{c2}$$

Despejando *c2* se tiene,

$$c2 = \frac{c1}{\tan\alpha} = \frac{4}{\tan(50°)} = 3{,}35$$

Ya se conoce la medida de los catetos. Ahora se calcula la hipotenusa:

$$h = \sqrt{3{,}35^2 + 4^2} = 5{,}22$$

El único dato que permanece desconocido es el ángulo β el cual se calculará por la diferencia entre 90° y α obteniendo:

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°.$$

Ejercicio: Resuelva los siguientes triángulos y grafique a escala.
a) $c1 = 5 \qquad \alpha = 30°$
b) $c2 = 3{,}5 \quad \alpha = 45°$.

Observe que los catetos del triángulo inscripto en la circunferencia trigonométrica son iguales a las razones trigonométricas. Dicho al revés, las razones trigonométricas de dicho rectángulo están representadas por los catetos del mismo. Es posible inferir que para cada triángulo rectángulo inscripto en una circunferencia trigonométrica existe una manera geométrica de representar las razones trigonométricas, que se muestran en la siguiente figura:

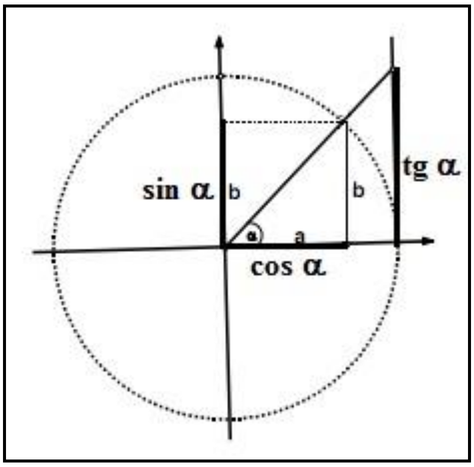


Figura 2: Representación de seno y coseno en la circunferencia trigonométrica

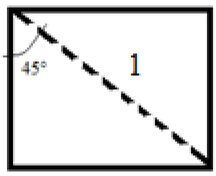
<u>Ejercicios</u>:

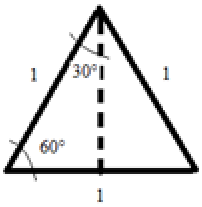
1. Trace un ángulo α obtuso en una circunferencia trigonométrica. Represente el seno y el coseno del ángulo α (remarque esos segmentos). Repita el ejercicio para un ángulo cuyo rayo terminal caiga en el tercer cuadrante y para uno cuyo rayo terminal caiga en el cuarto cuadrante.

2. Determine el signo del senα, cosα y tanα para cada uno de los ángulos del ejercicio 1 y complete la siguiente tabla.

	I	II	III	IV
$sen\,\alpha$	+			
$\cos\alpha$	+			
$\tan\alpha$	+			

Existen ciertos valores de α para los cuales las razones trigonométricas toman valores especiales; dichos ángulos se denominan ángulos notables. Estos ángulos se encuentran inscriptos en figuras geométricas sencillas, a saber, un cuadrado con su diagonal marcada cuya longitud es igual a 1 (uno) y un triángulo equilátero cuyo lado mide 1 (uno) y su altura marcada en él.



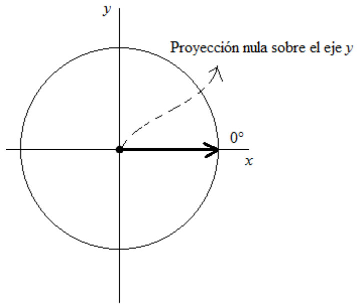


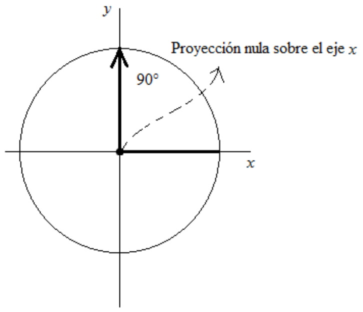
Los ángulos notables son: α=45°=π/4, α=30°=π/6 y α=60°=π/3. Si se observa atentamente se verá que cada figura ofrece un triángulo rectángulo que contiene a los ángulos notables y utilizando el teorema de Pitágoras es posible calcular las razones trigonométricas de dichos ángulos, como propone el siguiente ejercicio. Resuélvalo sin utilizar la calculadora.

Ejercicio: Usando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos de las figuras anteriores, obtenga:

a. sen 45°=……… cos45°=……… tan 45°=………
b. sen 30°=……… cos30° =……… tan 30°=………
c. sen 60°=……… cos60°=……… tan 60°=………

Ahora se analizarán los valores que toman las razones trigonométricas en los ángulos α=0° y α=90°. Al dibujar estos ángulos inscriptos en una circunferencia trigonométrica se observa que el rayo terminal de cada uno de los ángulos **no tiene proyección** sobre alguno de los ejes.





Se concluye entonces que:

sen 0° = 0 cos 0° = 1 tan 0° = 0

sen 90° = 1 cos 90° = 0 tan 90° = infinito

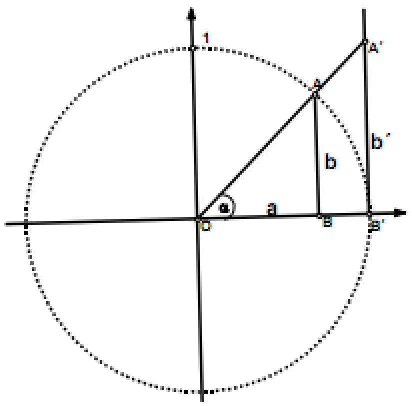
De esta manera, se tienen los valores de todas las razones trigonométricas para los ángulos 0°, 30°, 45°, 60° y 90°. Como se verá en el siguiente ejercicio, a partir de estos cinco valores pueden determinarse fácilmente las razones trigonométricas de los ángulos 120°, 135°, 150°, 180°, etc. Resuelva el ejercicio trazando el ángulo correspondiente en una circunferencia trigonométrica y relacionando la configuración con el cuadrado de diagonal 1 (uno) y el triángulo equilátero de lado 1 (uno).

Ejercicio: Complete la siguiente tabla. En los casos en que el resultado de la razón trigonométrica sea un número irracional, deberá escribirlo en forma completa y en forma decimal conservando tres cifras decimales. Sea cuidadoso/a al momento de asignar el signo al resultado obtenido.

ANGULO (RADIANES)	SENO	COSENO	TANGENTE
0			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
π			
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{5\pi}{4}$			
$\frac{4\pi}{3}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{7\pi}{4}$			
$\frac{11\pi}{6}$			
2π			

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS



Retornemos ahora a la circunferencia trigonométrica. Se marca un ángulo arbitrario en ella, por ejemplo, el ángulo α de la figura. El rayo terminal interseca la circunferencia en el punto A. Proyectando ese punto sobre el eje x se marca el punto B. De esta manera, se ha determinado un triángulo rectángulo. Conociendo que el radio de esta circunferencia es 1, las razones trigonométricas del ángulo α son

$$\sin\alpha = \frac{b}{h} = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{h} = \frac{a}{1} = a$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

De esta manera se ha obtenido un resultado sumamente útil en trigonometría y es la posibilidad de escribir la tangente de un ángulo en términos del seno y el coseno de ese mismo ángulo, es decir:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Esta identidad es válida para cualquier valor de la hipotenusa, no necesariamente 1, como se usó aquí.
Ahora bien, dado que tenemos una expresión para los catetos del triángulo rectángulo inscripto en la circunferencia trigonométrica anterior, se escribe a continuación el Teorema de Pitágoras para dicho triángulo:

$$a^2+b^2=h^2$$
$$(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1^2$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

<u>RECUERDE</u> siempre esta expresión, es una **IDENTIDAD** esencial y se utilizará en cualquier curso de Matemática, del Cálculo al Álgebra, incluso cuando estudie los números complejos.
Otras identidades que surgen a partir de la definición de las razones trigonométricas son:

<u>Ejercicio:</u>
Demuestre que las identidades trigonométricas mencionadas anteriormente siguen siendo válidas para cualquier valor del radio de la circunferencia (hipotenusa).

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

Combinando estas últimas identidades con $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ se obtienen nuevas identidades, a saber,

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta \qquad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

En resumen:

<u>Teorema</u>: (identidades trigonométricas)
Las siguientes igualdades se denominan identidades trigonométricas fundamentales:

$$\boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1} \qquad \boxed{\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}} \qquad \boxed{\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}} \qquad \boxed{\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}}$$

$$\boxed{1+\cot^2\theta=\csc^2\theta} \qquad \boxed{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta}$$

4) <u>TRIÁNGULOS OBLICUOS: TEOREMA DEL SENO Y TEOREMA DEL COSENO</u>

Cuando el triángulo en cuestión no cuenta con un ángulo recto, dicho triángulo se denomina *triángulo oblicuo*. A continuación se muestran algunos ejemplos:

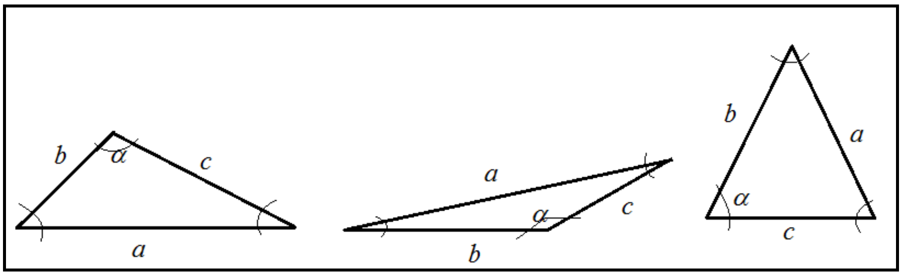


Figura 3: Ejemplos de triángulos oblicuos

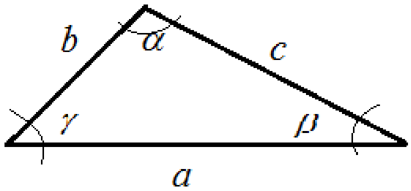
Sea un triángulo oblicuo como el que se muestra en la figura de abajo. Por lo general, para resolver un triángulo oblicuo se recurre al Teorema del Coseno y/o al Teorema del Seno. El **Teorema del Coseno** se utiliza para resolver un triángulo oblicuo cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Se expresa de la siguiente manera:

Teorema del Coseno:
En cualquier triángulo ABC se tiene:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

O bien,

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



Por ejemplo, se propone el siguiente triángulo oblicuo: $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 110°$ y se pide resolverlo. En primer lugar verificamos que los datos sean los adecuados. El ejercicio da el valor de b y c, por lo tanto, el ángulo necesario para poder utilizar el Teorema del coseno es el comprendido entre b y c, es decir, α. Una vez hecha la verificación, se procede a resolver. Se determina el valor de a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos 110° = 27{,}32$$
$$a = \sqrt{27{,}32} = 5{,}23$$

Ya se tiene el valor de los tres lados. Resta determinar los valores de dos ángulos; se resolverá primero β aplicando el Teorema del Coseno de la siguiente manera:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$2ac\cos(\beta) = a^2 + c^2 - b^2$$
$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{27{,}32 + 5^2 - 4^2}{2.5{,}23.5} = 0{,}69$$
$$\beta = \arccos(0{,}69) = 46°$$

Para determinar el ángulo γ, hacemos:

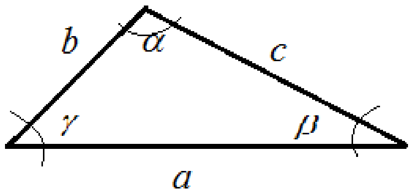
$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 110° - 46° = 24°$

En conclusión: $a = 5{,}23$, $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 110°$, $\beta = 46°$, $\gamma = 24°$.

Ejercicios: Aplique el teorema del coseno para resolver.

1. Resuelva el triángulo oblicuo: $b = 10$, $c = 7$, $\alpha = 50°$. Represente gráficamente a escala.
2. Resuelva el triángulo oblicuo: $a = 3$, $c = 6$, $\beta = 100°$. Represente gráficamente a escala.

Por otro lado, el **Teorema del Seno** permite resolver un triángulo oblicuo a partir de tres datos cualesquiera del triángulo. (Aclaración: algunos casos pueden no tener solución). Dado el triángulo oblicuo de la Figura, el Teorema del Seno se escribe de la siguiente manera:



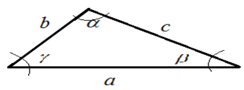
Teorema del Seno:
En cualquier triángulo la razón de las longitudes de cualquier par de lados es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos correspondientes entre sí. Así,

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

El Teorema del seno resulta ser una triple igualdad; los tres datos del problema deben pertenecer a sólo dos de las tres fracciones para poder resolver exitosamente. Por ejemplo, si los datos son (a, b, α) se utiliza la primera igualdad para obtener β (γ se obtiene por medio de $\gamma = 180° - \alpha - \beta$; finalmente se resuelve para c) resolviendo exitosamente. Por el contrario, si los datos son (a, b, c) es imposible ubicar los datos en sólo dos fracciones, cada uno pertenece a una fracción distinta y dicho triángulo deberá resolverse aplicando el Teorema del Coseno.

Ejercicios: Resuelva los siguientes triángulos oblicuos usando el teorema del seno.

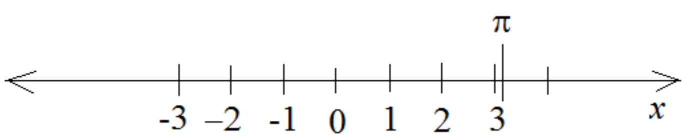
1. $a = 3$, $\beta = 35°$, $\gamma = 85°$
2. $b = 50$, $\beta = 100°$, $\gamma = 30°$



Ejercicio: Demuestre el Teorema del Coseno y el Teorema del Seno.

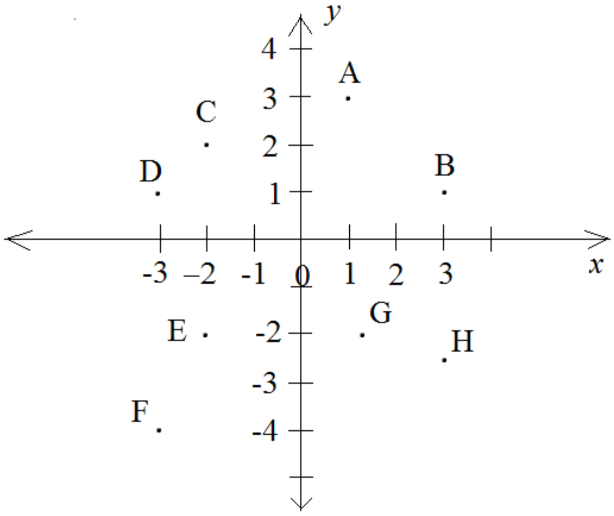
5) VECTORES EN $\mathbb{R}^2$

Los vectores son objetos matemáticos muy útiles en Física. Se utilizan para representar magnitudes vectoriales tales como posición, velocidad, aceleración, fuerzas, etc. El estudio se enfoca en primer lugar en los vectores en el plano, es decir, vectores en dos dimensiones y luego se hará una generalización al caso tridimensional (espacio).
Sea una recta numérica. Para determinar de manera unívoca un punto sobre ella basta con dar sólo un número, por ejemplo: 2, -3, π, $-\sqrt{2}$.



Por esta razón la recta numérica es un espacio de una dimensión, representado simbólicamente por $\mathbb{R}$ y cuya coordenada se representa por x.

Sea el plano. Para determinar un punto de manera unívoca es necesario utilizar dos valores numéricos (note que el plano queda atravesado por dos rectas numéricas perpendiculares entre sí que se cortan en 0), uno correspondiente a la coordenada horizontal y otro a la vertical.



Las letras designadas para representar cada una de las coordenadas de un punto en el plano son *x* e *y*. Para señalar el punto A se hace:

A = (1,3)

valor de *x*   valor de *y*

Para indicar el punto B:

B = (3,1)

valor de *x*   valor de *y*

La designación de un punto *P* en el plano está dada por un par ordenado de números reales, es decir,

$$P = (a,b)$$

El orden de los números corresponde siempre a (*x*,*y*), es decir, primero el valor de la coordenada *x* y luego el valor de la coordenada *y* del punto. El plano, o el espacio de dos dimensiones se representa usualmente con el símbolo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios:

1. Asigne las coordenadas a los puntos C, D, E, F, G, H.
2. Introduzca un sistema (*x*,*y*) en el plano (hoja del cuaderno) y ubique los siguientes puntos: P = (2,1)
   Q = (-3, 2)   R = (4, -2)   S = (-2, -3)
3. Introduzca un sistema (*x*,*y*) en el plano y ubique los siguientes puntos: L= (0,3) M= (0, -4) N=

La línea que une dos puntos se denomina segmento. En el caso de la figura anterior podrían unirse los puntos A y B a través del segmento recto que hay entre ellos. En física es importante la dirección en la que se unen los puntos, por ejemplo: no es lo mismo afirmar que una partícula se mueve desde A hacia B o que lo hace desde B hacia A. Si bien la distancia recorrida es la misma, el sentido del movimiento no lo es y por lo tanto el movimiento resultante es diferente. Cuando al segmento entre dos puntos se le asigna una dirección particular se está construyendo un vector. Entre los puntos A y B existen dos posibles vectores: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el **segmento de recta dirigido** de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es el segmento de recta que va de P a Q (Figura N°1*a*). Observe que los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes puesto que tienen direcciones opuestas (Figura N°1*b*).

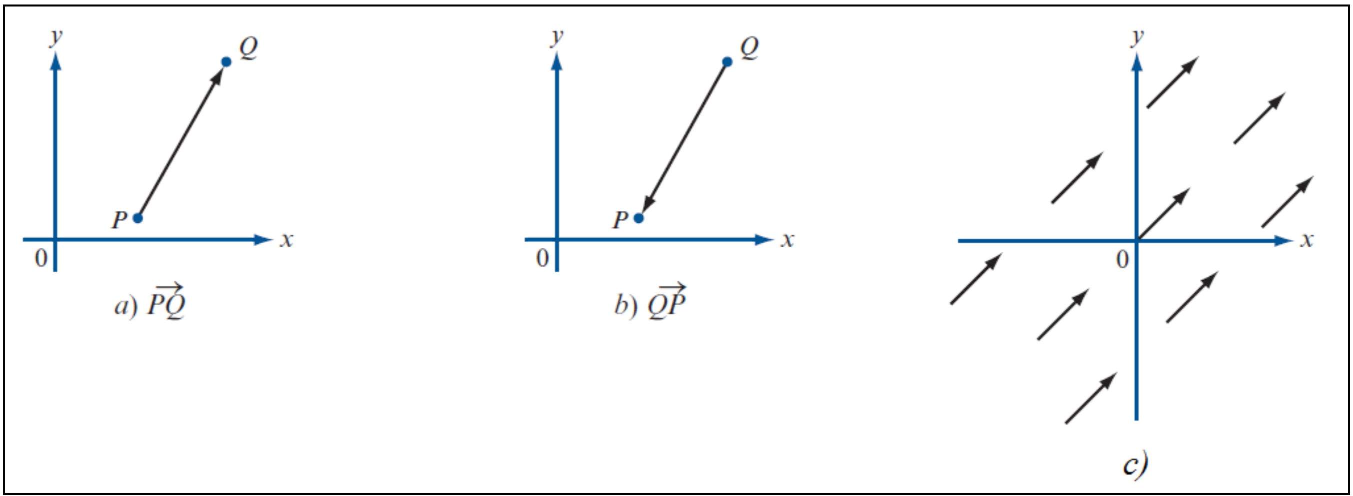
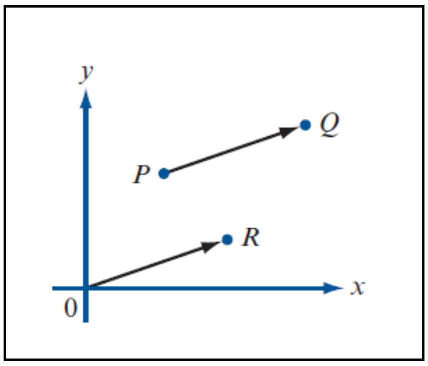


Figura N°1: definición geométrica de vector

El punto P en el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se denomina <u>**punto inicial**</u> del segmento y el punto Q se denomina <u>**punto terminal**</u>. Las dos propiedades más importantes de un segmento de recta dirigido son su <u>**magnitud**</u> (longitud) y su <u>**dirección**</u>. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son <u>**equivalentes**</u> sin importar en donde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos de la figura (Figura N°1*c*) son todos equivalentes.

<u>**Definición**</u>: (geométrica de vector)
El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina una **representación** del vector.

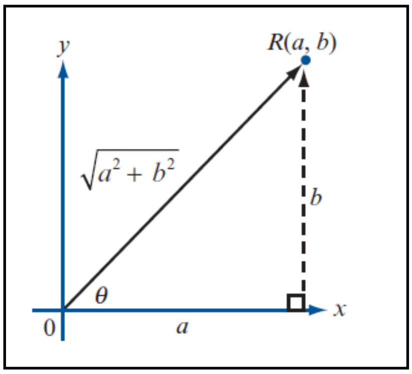
Se observa que un vector dado **v** se puede representar de múltiples formas. Sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de **v**. Entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ en forma paralela de manera que su punto inicial se traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OR}$, que es otra representación del vector **v**. Ahora suponga que el punto R tiene las coordenadas cartesianas (a, b). Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OR}$ por las coordenadas (a, b). Es decir, $\overrightarrow{OR}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial (0, 0) y punto terminal (a, b). Puesto que una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector **v** como (a, b).



<u>**Definición**</u>: (algebraica de vector)
Un **vector v** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector (0, 0).

Ejercicio 1: En un mismo par de ejes coordenados represente los siguientes vectores.

$\mathbf{v}_1 = (2,1)$ $\mathbf{v}_2 = (-1,3)$ $\mathbf{v}_3 = (-2,-3)$ $\mathbf{v}_4 = (1,-2)$ $\mathbf{0} = (0,0)$



Con esta definición es posible pensar en un punto en el plano *xy* con coordenadas (*a*, *b*) como un vector que comienza del origen y termina en (*a*, *b*). **El vector cero tiene magnitud cero**. Por lo tanto, puesto que los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el **vector cero no tiene dirección**. Se hace hincapié en que las definiciones geométrica y algebraica describen, precisamente, los mismos objetos. Puesto que en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o longitud de un vector como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Haciendo uso de la representación $\overrightarrow{OR}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$ se encuentra que, utilizando el Teorema de Pitágoras el módulo de **v** es:

$$\boxed{\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ejercicio 2: Calcule el módulo de los vectores del Ejercicio 1 y verifique su resultado gráficamente.

Se define la dirección del vector $\mathbf{v} = (a, b)$ como el ángulo θ, que forma el vector con el lado positivo del eje *x*. Por convención, se escoge θ tal que $0 \le \theta \le 2\pi$. Si $a \neq 0$, entonces

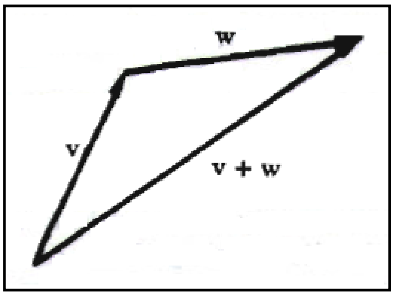
$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}}$$

Ejercicio 3:
1. Calcule la dirección de los vectores del Ejercicio 1 y verifique su resultado gráficamente.
2. A continuación se dan el módulo y la dirección de algunos vectores en el plano. Grafique a escala cada uno de ellos. Utilizando las razones trigonométricas obtenga las componentes del vector:
    a. $\|\mathbf{u}\|=5$ θ = 45°
    b. $\|\mathbf{v}\|=8$ θ = 150°
    c. $\|\mathbf{w}\|=6$ θ = 330°
    d. $\|\mathbf{z}\|=4$ θ = 225°

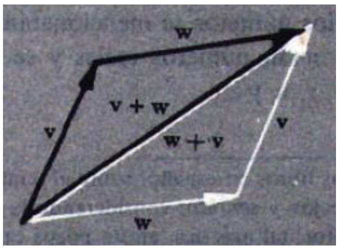
6) OPERACIONES CON VECTORES: SUMA Y MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

SUMA (Y RESTA) DE VECTORES: PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO

Definición: (geométrica de suma de vectores)
Si **v** y **w** son dos vectores cualesquiera, entonces la **suma** **v** + **w** es el vector que se determina como sigue: Colóquese el vector **w** de modo que su punto inicial coincida con el punto terminal de **v**. El vector **v** + **w** se representa por medio de la flecha que va del punto inicial de **v** al terminal de **w**.



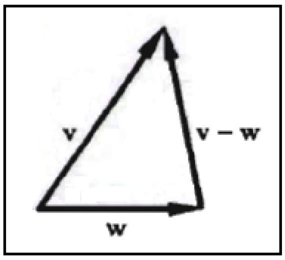
En la figura de la derecha se han construido las dos sumas, **v** + **w** (flechas negras) y **w** + **v** (flechas blancas); es evidente la suma coincide con la diagonal del paralelogramo determinado por **v** y **w** al ubicar estos vectores con origen común, es decir, de modo que tengan el mismo punto inicial. A este procedimiento se lo denomina suma de vectores mediante el **Método del Paralelogramo**.



Ejercicios:

1. Utilice el método del paralelogramo para calcular **u**+**v**.
   a. ||**u**||=5 α=90° ||**v**||=8 β=0°
   b. ||**u**||=5 α=60° ||**v**||=8 β=0°
2. Obtenga || **u**+**v** || y verifique gráficamente su resultado. Escriba una conclusión de 5 renglones a cerca de los resultados obtenidos.

Si **v** y **w** son dos vectores cualesquiera, entonces la sustracción se define por **v**-**w** = **v**+(-**w**). Para obtener la diferencia **v** - **w**, sin construir - **w**, colóquense **v** y **w** de modo que coincidan sus puntos iniciales; el vector que va del punto terminal de **w** hacia el punto terminal de **v** es entonces el vector **v** – **w**.



Ejercicio:

1. Calcule **u**-**v**.
   a. ||**u**||=5 a=90° ||**v**||=8 b=0°
   b. ||**u**||=5 a=60° ||**v**||=8 b=0°
2. Obtenga || **u**-**v** || y verifique gráficamente su resultado.

SUMA (Y RESTA) DE VECTORES: PUNTO DE VISTA ALGEBRAICO

La operación de adición vectorial es muy fácil de llevar a cabo en términos de componentes.

Definición: (algebraica de suma de vectores)
Si $\mathbf{v}=(a,b)$ y $\mathbf{w}=(c,d)$ entonces el vector suma $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ viene dado por:

$$\boxed{\mathbf{v}+\mathbf{w}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)}$$

De la misma manera, el vector diferencia

$$\boxed{\mathbf{v}-\mathbf{w}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)}$$

Cátedra: Álgebra y Geometría Analítica
Profesora Adjunta: Lic. Melina Bordcoch

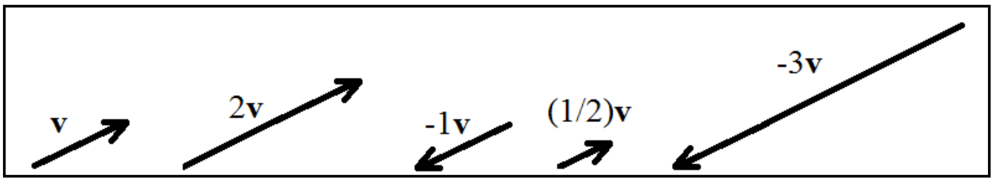
Ejercicio:

Sean los vectores **u**=(4,1) **v**=(2,5) **w**=(3,-2)

1. Calcule con el método de las componentes **u**+**v**, **u**+**w**, **v**+**w**. Represente gráficamente.
2. Calcule || **u**+**v** ||, || **u**+**w** ||, || **v**+**w** || y verifique su resultado gráficamente.
3. Calcule la dirección de los vectores **u**+**v**, **u**+**w**, **v**+**w** y verifique sus resultados gráficamente.
4. Repita los ejercicios 1. 2. y 3. para **u-v**, **w-u**, **v-w**.

MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR: PUNTOS DE VISTA GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO

Definición: (geométrica de multiplicación de un vector por un escalar)
Si **v** es un vector y *k* es el número real (escalar), entonces el **producto** *k***v** se define como el vector cuya longitud es |*k*| multiplicado por la longitud de **v** y cuya dirección es la misma que la de **v**, si *k* > 0 (es decir, si *k* es positivo) y opuesta a la de **v**, si *k* < 0 (*k* negativo). Se define *k***v** = **0** si *k* =0 ó **v**=**0**.



En la figura puede observarse geométricamente el efecto que tiene el escalar *k* cuando se produce el producto entre este escalar y un vector **v** cualquiera. Se observa que cada vez que el vector es multiplicado por un número positivo, el nuevo vector aumenta o disminuye su tamaño sin cambiar la dirección mientras que cuando el escalar resulta ser negativo, además de modificar el módulo la dirección se invierte.

Algebraicamente, se escribe la siguiente definición:

Definición: (algebraica de multiplicación de un vector por un escalar)
Si $\mathbf{v} = (a,b)$ es un vector y *k* es el número real (escalar), entonces el **producto** *k***v** se define como el vector cuyas componentes son:

$$\boxed{k\mathbf{v} = k(a,b) = (ka, kb)}$$

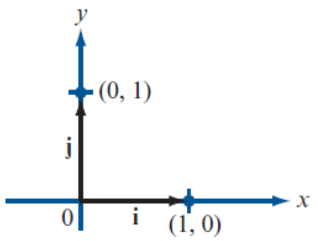
Ejercicio:

1. Sea el vector **u** tal que su módulo es ||**u**||=3 y su dirección es θ=π/3. Dé módulo y dirección de los vectores: 2**u**, -**u**, (5/2)**u**, -3**u**. Represente gráficamente.
2. Dado el vector **u** = (-3, 2), obtenga los vectores: 3**u**, -2**u**, (1/2)**u**, (-7/3)**u** . Represente gráficamente y corrobore que el módulo y dirección del vector resultante sea el correcto.

Las dos operaciones hasta aquí estudiadas, es decir, **suma** y **multiplicación por un escalar**, poseen ciertas propiedades. Usando métodos algebraicos o geométricos es posible demostrar que cada una de las afirmaciones contenidas en el siguiente teorema son verdaderas.

Teorema: (Aritmética vectorial)
Si **u** , **v** *y* **w** son vectores y *k,1* son escalares, entonces se cumplen las relaciones siguientes:
a) **u** + **v** = **v** + **u**
b) (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
c) **u** + **0** = **0** + **u** = **u**
d) **u** + (-**u**) = **0**
e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
f) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$
g) $(k + l)\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$
h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

7) VECTORES i Y j. VECTORES UNITARIOS



Existen dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ que nos permiten representar otros vectores en el plano de una forma conveniente. Se denota el vector (1, 0) por el símbolo **i** y el vector (0, 1) por el símbolo **j**.

$$\mathbf{i} = (1,0)$$
$$\mathbf{j} = (0,1)$$

La utilidad de estos dos vectores se refleja en el siguiente ejemplo. Si se considera **v** = (2, 3) puede escribirse:

$$2\mathbf{i} = 2\,(1,0) = (2,0)$$

$$3\mathbf{j} = 3\,(0,1) = (0,3)$$

y sumando ambos resultados:

$$2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (2,0) + (0,3) = (2,3) = \mathbf{v}$$

Entonces:

$$\mathbf{v} = (2,3) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Definición: (versores)
Sea $\mathbb{R}^2$. Existen dos vectores particulares, denominados versores, a saber,

$$\mathbf{i} = (1,0)$$
$$\mathbf{j} = (0,1)$$

tales que cualquier vector **v** = (*a*,*b*) en el plano puede escribirse como una combinación lineal de **i** y **j**:

$$\mathbf{v} = (a,b) = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$$

De esta manera se cuenta con dos formas de expresar un vector. Por un lado se tiene la **representación en componentes** **v** = (*a*,*b*) y por otro la **representación como combinación lineal de i y j**, **v** = *a* **i** + *b* **j.**

Ejercicios:

1. Escriba los siguientes vectores en la representación como combinación lineal de **i** y **j**:
   a. **u** = (-3, 2) b. **v** = (1, -3) c. **w** = (2, 1) d. **z** = (0, -4) e. **u** = (5/2, 0)
2. Escriba los siguientes vectores en la representación en componentes:
   a. **u** = *15* **i** + *8* **j** b. **v** = -*7* **i** + **j** c. **w** = *12* **i** - 11 **j** d. **z** = *5* **i** e. **v** = -*6* **j**
3. Calcule módulo y dirección de **i** y **j**.

Definición: (vector unitario)

Un vector unitario es un vector de longitud 1 (uno).

Teorema: (vector unitario)

Sea un vector **v** tal que $\mathbf{v} \neq 0$. Entonces, $\hat{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección de **v**.

Ejercicios:

1. Verifique que $\mathbf{v} = \dfrac{1}{2}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ es un vector unitario.
2. Encuentre el vector unitario en la dirección de **u** = *2* **i** – 3**j**

8) PRODUCTO ESCALAR

Definición: (producto escalar)
Sean **u** = (u_x, u_y) y **v** = (v_x, v_y) dos vectores. El producto escalar entre **u** y **v** está definido como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

El producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de vectores. Observe que el producto escalar entre dos vectores da como resultado un **número**.

Ejercicios: Dados los vectores **u** = *2* **i** – 3**j** y **v** = *4* **i** +**j**, encuentre:

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ b. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ c. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ d. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

Compare entre sí los resultados obtenidos en a. y b.
Compare el resultado obtenido en c. con el módulo de **u**.
Compare el resultado obtenido en d. con el módulo de **v**.

Teorema: (norma de un vector)

Sea **v** un vector. Entonces $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

Teorema: (propiedades del producto escalar)

Sean **u**, **v** y **w** vectores y *c* un número real. Entonces,

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ la igualdad se obtiene si y sólo si $\mathbf{u}=\mathbf{0}$
2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
4. $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v})=c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

Teorema: (ángulo entre vectores)
Sean **u** y **v** dos vectores distintos del vector cero. Si θ es el ángulo entre ellos, entonces:

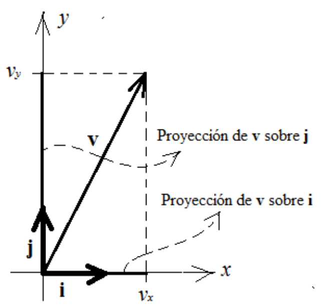
$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Si los vectores **u** y **v** son distintos del vector cero, sus respectivos módulos serán no nulos. Por lo tanto puede establecerse una equivalencia directa entre el ángulo comprendido entre los vectores y el resultado de su producto escalar. Algunos resultados se pueden interpretar inmediatamente. Por ejemplo, si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ implica que $\cos\theta=0$ y por lo tanto θ=90°, es decir, los vectores son ortogonales. Si $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}=1$ implica que $\cos\theta=1$ y por lo tanto θ=0°, es decir, los vectores son paralelos. Así, al conocer el producto escalar entre dos vectores automáticamente se cuenta con un dato extra: el ángulo entre los vectores.

Ejercicios: Encuentre el ángulo entre los vectores usando el teorema anterior. Luego, verifique gráficamente.

1. **u** = *3* **i** + 4**j**   **v** = **i** - 2**j**
2. **u** = *2* **i** + 2**j**   **v** = **2i**
3. **u** = **i** + 2**j**   **v** = 3**i** +6**j**
4. **u** = (1/2) **i** + 3**j**   **v** = 2**i** – (1/3)**j**

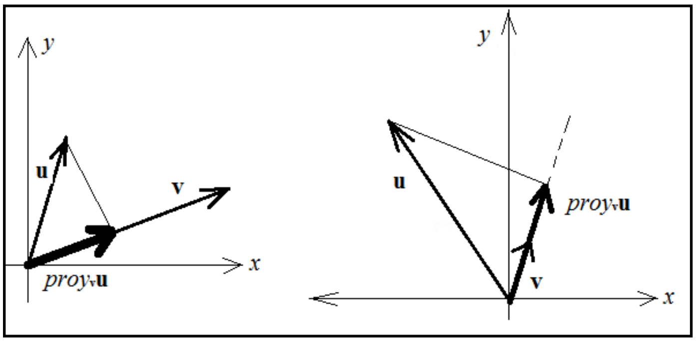
Otra de las propiedades que posee el producto escalar es que a partir de él puede obtenerse la proyección de un vector sobre otro. Al calcular las componentes de un vector **v** cualquiera, se están calculando dos proyecciones: la proyección del vector **v** sobre el vector **i** y la proyección del vector **v** sobre el vector **j**.
Cuando la proyección que uno necesita calcular es la de un vector u sobre otro vector v la manera de proceder es la siguiente:



Definición: (proyección)
Sean **u** y **v** dos vectores distintos del vector cero. La proyección de u sobre v es un vector denotado como $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ que se define como:

$$proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$

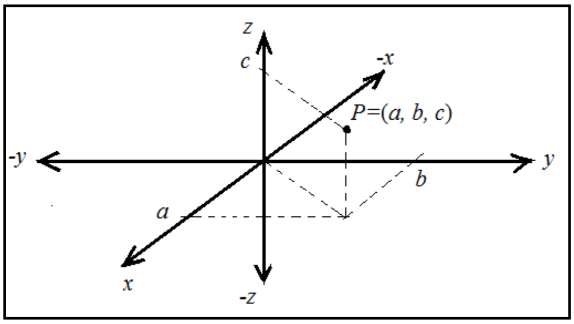
Cátedra: Álgebra y Geometría Analítica
Profesora Adjunta: Lic. Melina Bordcoch



> **Ejercicio:** Sean los vectores **u**= 2**i**+3**j** y **v**=**i**+**j**. Obtenga $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $proy_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. Represente gráficamente.

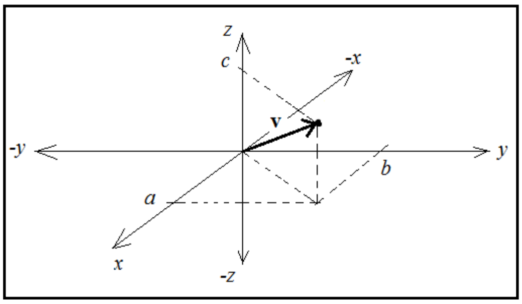
9) GENERALIZACION A $\mathbb{R}^3$. DEFINICIÓN DE k.

Hasta el momento se ha trabajado con puntos y vectores en el plano. Ahora se hará una generalización al espacio tridimensional. Para determinar unívocamente un punto en el espacio es necesario dar 3 (tres) números que corresponde a la coordenadas *x*, *y* y *z*, en ese orden, es decir,



P=(*a*, *b*, *c*)

donde *a* es la coordenada *x*, *b* la coordenada *y* y *c* es la coordenada *z*. se dice entonces que un punto en $\mathbb{R}^3$ queda definido por una terna ordenada. $\mathbb{R}^3$ tiene por coordenadas a (*x*, *y*, *z*). La siguiente figura muestra cómo se ordenan y grafican los 3 ejes coordenados de $\mathbb{R}^3$.



De la misma manera, puede trazarse un vector que tenga punto inicial en el origen *O*=(0, 0, 0) y punto final en un punto *P*=(*a*, *b*, *c*). Por definición algebraica de vectores, es posible escribirlo en términos de sus componentes:

v= (*a*, *b*, *c*)

A partir de las componentes puede obtenerse el módulo del vector utilizando el teorema de Pitágoras en 3 dimensiones, es decir:

$$\boxed{\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Para determinar de manera unívoca la dirección del vector en $\mathbb{R}^3$ será necesario calcular los 3 ángulos formados por el vector **v** y cada uno de los semiejes positivos. Si α es el ángulo entre **v** y el semieje positivo de *x*, β es el ángulo entre **v** y el semieje positivo de *y* y γ es el ángulo entre **v** y el semieje positivo de *z*, la dirección de v se obtiene a través de:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\|\mathbf{v}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b}{\|\mathbf{v}\|} \qquad \cos\gamma = \frac{c}{\|\mathbf{v}\|}$$

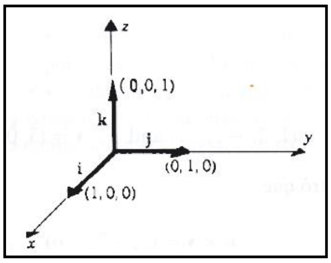
que son los denominados **cosenos directores**.

Las operaciones suma y multiplicación de un vector por un escalar y el producto escalar (con su característica de determinar el ángulo entre dos vectores y la proyección de un vector sobre otro completamente arbitrario) no se alteran, ni en proceso de resolución ni en sus propiedades. Vale decir entonces, que las reglas aplicadas a las operaciones entre vectores en $\mathbb{R}^2$ son perfectamente válidas y trasladables a $\mathbb{R}^3$. El siguiente ejercicio es un reflejo de ello.

Ejercicios: Dados los vectores $\mathbf{u} = (3, 1, -4)$ y $\mathbf{v} = (-2, 3, 2)$ resuelva los siguientes ítems y represente gráficamente cada uno de ellos.

1. Módulo y dirección de **u** y **v**.
2. Vector unitario en dirección de **u** y el vector unitario en dirección de **v**.
3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} =$ $\mathbf{v} - \mathbf{u} =$ $-2\,\mathbf{u} =$ $(1/2)\,\mathbf{v} =$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
5. Ángulo entre **u** y **v**.
6. $proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$

Para expresar un vector cualquiera en $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de versores, será útil escribir **i** y **j** en tres dimensiones:



$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$
$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

La intuición señala que en tres dimensiones, el vector unitario que completa la terna de versores es,

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

de manera tal que el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ se escribe como combinación lineal de **i**, **j**, **k** de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

Ejercicio: Tome todos los vectores del ejercicio anterior y escríbalos como combinación lineal de **i**, **j**, **k**

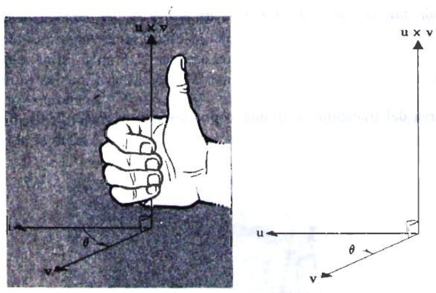
10) PRODUCTO VECTORIAL

Anteriormente se definió el producto escalar entre dos vectores. Dicha definición toma dos vectores y arroja como resultado un número real (escalar). El producto vectorial es la operación tal que toma dos vectores y arroja como resultado un tercer vector que apunta en dirección perpendicular al plano formado por los dos primeros. La manera de resolver un producto vectorial está dada por la siguiente definición.

Definición: (producto vectorial)

Sean $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ dos vectores. El producto vectorial entre **u** y **v** se denota como $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\mathbf{i} - (u_x v_z - u_z v_x)\mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\mathbf{k}$$



La figura muestra a los vectores **u**, **v** y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Es posible deducir la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ incluso antes de calcular dicho vector a partir de la definición anterior. Cualquiera sea la dirección de **u** y de **v**, ambos están contenidos en un único plano. El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ resulta ser perpendicular a dicho plano, es decir, es perpendicular tanto a **u** como a **v** simultáneamente. Ahora bien, el hecho de que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sea perpendicular al plano no implica que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ apunte hacia arriba como se muestra en la figura; $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ podría haber sido tal que apunte hacia abajo. Para determinar el sentido de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ se utiliza la regla de la mano derecha: los dedos de la palma de la mano apuntan en la dirección del primer vector del producto $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, en este caso de **u** y giran hacia el segundo vector, **v**, por el menor ángulo. En consecuencia, el pulgar queda apuntando en la dirección de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Ejercicios: Dados los vectores **u** = **i** – **j** +2 **k** y **v** = *2* **i** +3**j** - 4 **k** encuentre:

a. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ b. $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ c. $\mathbf{u}\times\mathbf{u}$ d. $\mathbf{v}\times\mathbf{0}$ e. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

Represente gráficamente y aplique la regla de la mano derecha para corroborar dirección de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
Compare entre sí los resultados obtenidos en a. y b.
¿Qué puede decir a cerca de los resultados de c. d. y e.?

Teorema: (propiedades del producto vectorial)
Si **u**, **v** y **w** son vectores cualesquiera en el espacio tridimensional y *c* es un escalar cualquiera, entonces*:*

a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$

b) $\mathbf{v}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$

c) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

d) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

e) $c(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(c\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times(c\mathbf{v})$

f) $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

g) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$

Resta por analizar la interpretación geométrica del módulo del producto vectorial. Como todo vector, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ tiene componentes a partir de las cuales es posible calcular el módulo de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, es decir, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. Sin embargo, si no estamos interesados en las componentes de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ pero sí en su módulo es posible calcular $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ sin necesidad de conocer las componentes. El siguiente teorema nos dice cómo:

Teorema: (módulo del producto vectorial)

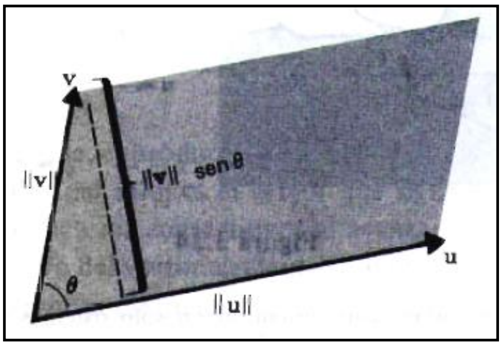
Si θ es el ángulo comprendido entre u y v, entonces:

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$$

Ejercicio: En el ejercicio anterior se dieron los vectores **u** = **i** – **j** +2 **k** y **v** = *2* **i** +3**j** - 4 **k**. En el inciso a. se calculó $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, con lo cual ya se tienen las componentes de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

1. Calcule $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ a partir de las componente de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
2. Calcule $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ a partir del teorema del módulo del producto vectorial.
3. Compruebe que los resultados entre a. y b. sean iguales

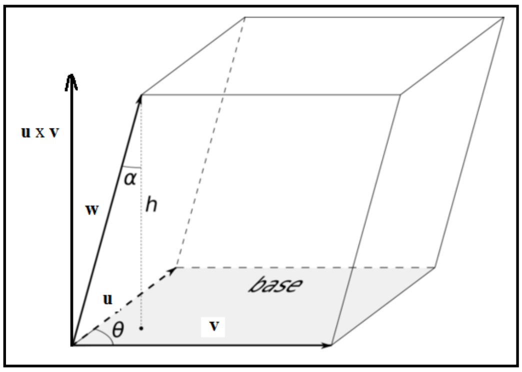
Con el ejercicio anterior se verifica la igualdad $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$ para un caso particular. Sin embargo es posible demostrarla para cualquier par de vectores **u** y **v**. ¿Qué interpretación geométrica le cabe a la igualdad? Es decir, si se tuviera que representar gráficamente $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ ¿qué gráfico resultará? La respuesta está



en el significado geométrico de $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$. Si se grafican los vectores **u** y **v** y se marca el paralelogramo que contienen se ve que $\|\mathbf{v}\|\sin\theta$ es la altura de dicho paralelogramo. Al multiplicar $\|\mathbf{v}\|\sin\theta$ por ||**u**|| se está multiplicando la base del paralelogramo por la altura del mismo lo cual resulta en el tamaño de su área. Dicho en otras palabras, el módulo de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es igual al área del paralelogramo contenido entre **u** y **v**.

11) TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Se consideran tres vectores **u**, **v** y **w** en R3 que no estén contenidos en el mismo plano. Esta condición implica que los tres vectores forman un volumen tridimensional denominado **paralelepípedo**. El área de la base del paralelepípedo se calcula a partir del módulo del producto vectorial entre los vectores **u** y **v**, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, que son los que contienen a la base. La longitud de la altura *h* del paralelepípedo corresponde al módulo del vector que resulta de la proyección del vector **w** sobre $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Multiplicando el área de la base por la longitud de la altura se obtiene el volumen del paralelepípedo:



$$Vol = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\|proy_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\mathbf{w}\|$$

$$\boxed{Vol = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}}$$

El producto $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ se denomina triple producto escalar o producto mixto y geométricamente representa el volumen del paralelepípedo contenido por los vectores **u**, **v** y **w**.

Ejercicio: Calcule el volumen del paralelepípedo contenido por los siguientes vectores y represente gráficamente:

1. **u** = –4 **j** +5 **k** **v** = 3**j** + 4 **k** **w** = 3 **i** + **k**
2. **u** = 2**i** –3 **j** +2 **k** **v** = 3 **i** +**j** + 4 **k** **w** = - 4 **i** + **k**